

Math. P.

Tolly

242^m

13

1844

ANNUAL

REPORT

1844

ANLEITUNG

ANLEITUNG

ZUR

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-

RECHNUNG.

HEIDELBERG.

AKADEMISCHE VERLAGSHANDLUNG VON C. F. W. WILHELM

1843

237 ly



$$cm = \sqrt{n^2 - \frac{s^2}{4}}$$

$$sc = n - \sqrt{n^2 - \frac{s^2}{4}}$$

$$cA = \frac{s}{2}$$

$$cA = n$$

$$sA = \sqrt{\frac{s^2}{4} + n^2} - \sqrt{n^2 - \frac{s^2}{4}}$$

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-

RECHNUNG.

ANLEITUNG

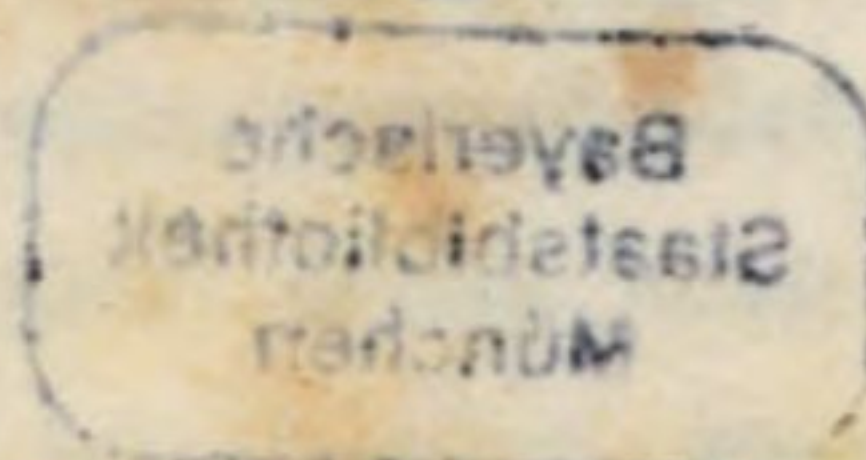
ZUR

DIFFERENTIAL - UND INTEGRALRECHNUNG,

VON

Dr. PH. JOLLY,

AUSSERORDENTLICHEM PROFESSOR DER ANGEWANDTEN MATHEMATIK AN DER
UNIVERSITÄT HEIDELBERG.



HEIDELBERG.

AKADEMISCHE VERLAGSHANDLUNG VON C. F. WINTER.

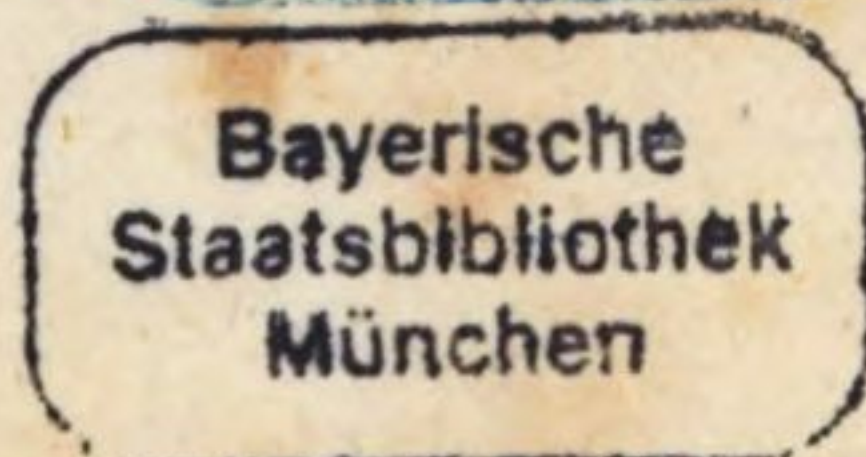
1846.

ANLEITUNG

XII

DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

VON



HEIDELBERG

Druck von H. L. Brönnert in Frankfurt a. M.

1846

VORREDE.

Nachdem mehr als 150 Jahre seit der Erfindung der Differentialrechnung verflossen sind, nachdem eben diese Rechnungsmethode von ihren Erfindern Newton und Leibnitz an bis auf die neueste Zeit durch die ausgezeichnetsten mathematischen Talente ausgebildet und vervollständigt wurde, kann (selbst wenn man neben jenen Heroen der Wissenschaft das bescheidene Maas der eigenen Kräfte verkennen sollte) mit dem Entwurfe der Grundzüge einer so vollendeten und vielfach durchsiebten Disciplin kaum eine andere Aufgabe zu lösen gemeint sein, als die einer zweckmässigen Anordnung, einer klaren Exposition und einer leicht zugänglichen Darstellung.

Für jetzt ist noch immer die Kenntniss der Differentialrechnung auf einen kleinen Kreis beschränkt. Gleichwohl ist diese Rechnungsmethode nicht allein eine der scharfsinnigsten Erfindungen des menschlichen Verstandes, und schon von dieser Seite her von besonderem Interesse, sie ist zugleich zur Entwicklung der geometrischen und dynamischen

Wissenschaften das unentbehrlichste Hülfsmittel. Die merkwürdige Ausbildung, welche die neueren Nationen den Naturwissenschaften ertheilt haben, war bedingt durch eine vorangehende Ausbildung des mathematischen Wissens, und gerade hier war die Erfindung der Differentialrechnung der wichtigste Hebel für die Herstellung und weiterer Ausführung der Wahrheiten der analytischen Mechanik, der theoretischen Astronomie und der mathematischen Physik. — Von diesem Gesichtspunkte aus ist jeder Versuch, zur Ausbreitung der Kenntniss der Differentialrechnung etwas beizutragen, gerechtfertiget.

Die Begründung der Differentialrechnung ist auf verschiedenen Wegen versucht und zu Stande gebracht. Jeder dieser Wege hat seine eigenthümlichen Vorzüge; der eine zeichnet sich aus durch die Kürze, mit der die Resultate gewonnen werden, und durch die Leichtigkeit, mit welcher dieselben in geometrischen und dynamischen Forschungen zur Anwendung kommen, ein anderer empfiehlt sich durch eine einfache elementare Deduction, noch andere haben eine mathematisch schärfere und allgemeinere Begründung zum Vorzug. Die Wahl des einen oder andern dieser Wege wird von dem Zweck abhängen, den man im Auge hat. — Meine Absicht war auf einem möglichst elementaren und doch nicht zu weitläufigen Wege zur Kenntniss der Differentialrechnung zu führen, indem ich mir vorsetzte für Jene eine Anleitung zu schreiben, welche die Differentialrechnung ihrer Anwendungen halber suchen, für die es daher erlaubt, ja sogar geboten sein wird, weitläufige Erörterungen zu vermeiden und der Einfachheit der Herleitung, selbst wenn durch dieselbe von vornherein nicht die sonst

erreichbare Allgemeinheit sogleich erzielt werden sollte, ein entscheidendes Moment einzuräumen. Zur Erreichung meines Zweckes habe ich nach dem Vorgange von Euler das Differential als jenen speciellen Fall der Differenz bezeichnet, in welchem die Zunahme der Veränderlichen Null wird. Der Differentialquotient erscheint hiernach als ein Bruch, in welchem Zähler und Nenner verschwindend klein oder Null werden. Zur Bestimmung dieses unter einer unbestimmten Form erscheinenden Quotienten habe ich mich der Entwicklung der Functionen in Reihen bedient. Es schien mir hiernach zweckmässig in einer Einleitung wenigstens eines der Mittel zu bezeichnen, durch welches die Entwicklung der Functionen in Reihen zu Stande gebracht werden kann. Ich habe mich hierzu der kürzesten Methode, der der unbestimmten Coefficienten, bedient, obschon mir nicht unbekannt ist, dass der Werth dieser Methode mehr in dem liegt, was heuristisch als in dem, was streng wissenschaftlich durch sie geleistet wurde und geleistet werden kann.

In der Ueberzeugung, dass, wenn man unter verschiedenen Methoden, die zu gleichem Ziele führen, eine sich angeeignet und in ihren Consequenzen verfolgt hat, es von wissenschaftlichem Interesse und von praktischem Nutzen ist, wenigstens dem Ideengange nach auch die andern Methoden kennen zu lernen, habe ich in einem späteren Abschnitte es versucht die verschiedenen Methoden der Begründung der Differentialrechnung zusammenzustellen.

Ueber die Anordnung, die ich befolgt habe, gibt das Inhaltsverzeichniss näheren Aufschluss. Ich habe nur zu

bemerken, dass ich vorzugsweise darauf bedacht war, jene Gegenstände ausführlicher zu entwickeln, die für die Anwendung von besonderer Wichtigkeit sind, dagegen andere, für die gleiche Gründe sich nicht geltend machen lassen, kürzer zu behandeln, und dass ich aus eben diesem Gesichtspunkte Einzelnes, dessen sonstige Bedeutung ich nicht verkenne, sogar ganz übergangen habe.

Die Quellen, die ich benutzte, habe ich nebst kurzen geschichtlichen Notizen meist am Schlusse jedes Abschnittes, zuweilen auch in den Text verwebt, näher bezeichnet.

Heidelberg den 1. Juni 1846.

Jolly.

Inhalt.

Seite

Einleitung.

Von den Functionen und deren Entwicklung in Reihen 1

Differentialrechnung.

Bezeichnung des Gegenstandes der Untersuchung 9

Erster Abschnitt. Differentiation der Functionen einer
veränderlichen Grösse 10

Bestimmung des ersten Differentials einer Function einer
veränderlichen Grösse 10

Differential eines Produktes 12

Differentiation algebraischer Functionen 13

Differentiation transcender Functionen 15

Differentiation der Functionen von Functionen 17

Differentiation unentwickelter Functionen 19

Wiederholte Differentiation der Functionen einer veränder-
lichen Grösse 22

Zweiter Abschnitt. Differentiation der Functionen
zweier und mehrerer veränderlicher Grössen 25

Differentiation der Functionen zweier veränderlicher Grössen 25

Differentiation der Functionen dreier und mehrerer verän-
derlicher Grössen 27

Differentiation unentwickelter Functionen dreier veränder-
licher Grössen 34

Dritter Abschnitt. Aenderung der unabhängig verän-
derlichen Grösse 39

	Seite
Vierter Abschnitt. Taylor's Reihe für Functionen einer und mehrerer veränderlichen Grössen	46
Entwicklung der Taylor'schen Reihe	46
Bedingung der Gültigkeit der Taylor'schen Reihe	50
Ausdehnung der Taylor'schen Reihe auf Functionen mehrerer veränderlicher Grössen	57
Fünfter Abschnitt. Von den grössten und kleinsten Werthen der Functionen	59
Grösste und kleinste Werthe der Functionen einer veränderlichen Grösse	59
Grösste und kleinste Werthe der Functionen zweier veränderlicher Grössen	75
Grösste und kleinste Werthe der Functionen dreier veränderlicher Grössen	80
Maxima und Minima unentwickelter Functionen	83
Sechster Abschnitt. Bestimmung der Werthe reeller Functionen für jene Fälle, in welchen die Functionen durch specielle Werthe der Veränderlichen unter einer der unbestimmten Formen $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0$ u. s. w. erscheinen	88
Siebenter Abschnitt. Ueber die verschiedenen Methoden der Begründung der Differentialrechnung	100
Methode des unendlich Kleinen	100
Methode der Fluxionen	107
Methode von Euler	108
Methode von Lagrange	109
Methode von Ampere	113
Achter Abschnitt. Anwendung der Differentialrechnung auf Geometrie	117
Geometrische Bedeutung des ersten Differentialquotienten	117
Geometrische Bedeutung des zweiten Differentialquotienten	119
Berührung der Curven (Osculation)	125
Evoluten der Curven	129
Polar - Coordinaten	133
Krümmungshalbmesser ausgedrückt durch Polar - Coordinaten	133
Subtangente und Subnormale	134
Differential des Bogens	135

Integralrechnung.

Einleitung	138
------------	-----

<i>Erste Abtheilung.</i> Integration der Differentialformeln des ersten Grades und einer unabhängig Veränderlichen.	
---	--

Erster Abschnitt. Unbestimmte Integrale	139
---	-----

Integration ganzer algebraischer Differentialformeln	141
--	-----

Integration gebrochener algebraischer Differentialformeln	142
---	-----

Integration irrationaler algebraischer Differentialformeln	152
--	-----

Integration der Differentialformeln, welche transcendente Functionen der Veränderlichen enthalten.	161
--	-----

Reihe von J. Bernoulli	173
------------------------	-----

Die verschiedenen Methoden des Integrirens	174
--	-----

Näherungsweise Bestimmung der Integrale durch Reihen	180
--	-----

Kennzeichen der Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen	180
---	-----

Zweiter Abschnitt. Bestimmte Integrale	194
--	-----

Darstellung eines bestimmten Integrales als Summe unendlich vieler verschwindend kleiner Grössen	194
--	-----

Ableitung der Werthe bestimmter Integrale aus unbestimmten Integralfunctionen	197
---	-----

Ableitung bestimmter Integrale aus anderen bestimmten und bekannten Integralen	201
--	-----

Euler'sche Integrale	213
----------------------	-----

Näherungsweise Bestimmung bestimmter Integrale	217
--	-----

Dritter Abschnitt. Integration der Differentialgleichungen	224
--	-----

Integration durch Absonderung der Veränderlichen	224
--	-----

Absonderung der Veränderlichen in homogenen Differentialgleichungen	225
---	-----

Absonderung der Veränderlichen in einem speciellen Falle	227
--	-----

Kennzeichen der Integrabilität einer Differentialgleichung	228
--	-----

Factoren, durch welche nicht-integrable Gleichungen integrabel werden	232
---	-----

Integration der Differentialgleichungen, in welchen der Quotient $\frac{dy}{dx}$ in der zweiten oder höheren Potenz enthalten ist	236
---	-----

Singuläre Integrale	239
---------------------	-----

	Seite
Bestimmung des singulären Integrals aus dem vollständigen Integral	241
Bestimmung des singulären Integrals ohne Kenntniss des vollständigen Integrals	248
Vierter Abschnitt. Anwendung der Integralrechnung auf Geometrie	255
Quadratur der ebenen Curven	255
Rectification der ebenen Curven	262
Quadratur der Rotations - Oberflächen	264
Cubatur des durch Rotation einer Curve eingeschlossenen Raumes	268
Geometrische Bedeutung der singulären Integrale	270
<i>Zweite Abtheilung. Integration der Differentialformeln des zweiten Grades und höherer Grade mit einer unabhängig Veränderlichen.</i>	
Integration der Differentialformeln des zweiten Grades und höherer Grade	273
Integration der Differentialgleichungen des zweiten Grades	276
Integration der homogenen Differentialgleichungen des zweiten Grades	285
Integration der linearen Differentialgleichungen	287
Elimination der Veränderlichen aus einem System von Differentialgleichungen	301
Integration durch Reihen	305
<i>Dritte Abtheilung. Integration der Differentialformeln des ersten Grades und mehrerer unabhängig Veränderlichen.</i>	
Bedingung der Integrabilität einer Differentialformel zweier und mehrerer Veränderlichen	313
Integration solcher Formeln	314
Bedingung der Integrabilität der Differentialgleichungen dreier Veränderlichen	318
Integration solcher Gleichungen	320
Integration der Differentialgleichungen mit partiellen Differentialen und drei Veränderlichen	323
Integration der Differentialgleichungen mit partiellen Differentialen und mehreren Veränderlichen	333

Vierte Abtheilung. Integration der Differentialformeln des zweiten und höherer Grade mit mehreren unabhängig Veränderlichen.

Bedingung der Integrabilität solcher Formeln und Integration derselben	338
Integration der Differentialgleichungen mit partiellen Differentialien höherer Ordnungen	342

Variationsrechnung.

Bezeichnung des Gegenstandes der Variationsrechnung	347
Das Princip der Variationsrechnung	350
Entwicklung der Variationen in einzelnen Fällen	354
Anwendung der Variationsrechnung auf Probleme über Maxima und Minima	362

Nicht Abhängig. Integration der Differentialfor-
meln des zweiten und höheren Grades mit meh-
reren unabhängig Veränderlichen.

Bedingung der Integrabilität solcher Formeln und Integra-
tion derselben.

Integration der Differentialgleichungen mit partiellen Diffe-
rentialen höheren Grades.

Druckfehler.

Seite 17 Zeile 4 von oben: st. $d \cos. x$ lies $d \operatorname{cosec}. x$.

21 „ 4 von unten: „ $\frac{\Delta f(x, y+k)}{\Delta x}$ lies $\frac{\Delta f(x, y+k)}{\Delta x}$.

22 „ 3 „ „ : „ $3 \cdot 2 \cdot 1$ lies $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot dx^3$

23 „ 3 „ „ : „ $\frac{df(y, y)}{dy}$ lies $\frac{df(x, y)}{dy}$

34 „ 3 von oben: „ $\frac{du}{dz}$ lies $\frac{du}{dz} dz$

36 „ 5 „ „ : „ $\frac{d\varphi(x, y)}{dy}$ lies $\frac{d\varphi(x, y)}{dx}$

61 „ 1 von unten: „ $f(x+h)$ lies $f(x-h)$

92 „ 12 von oben: „ Mh lies Mh^p

113 „ 14 von unten: „ $\frac{2x+1}{2}$ lies $\frac{2n+1}{2}$

153 „ 3 „ „ : „ $\cos$ lies cosec

162 „ 2 „ „ : ist das erste Minuszeichen auszulöschen.

198 „ 1 „ „ : st. $-\frac{1}{2} \operatorname{Arc}$ lies $+\frac{1}{2} \operatorname{Arc}$

219 „ 11 „ „ : „ (x) lies (1) .

Einleitung.

Von den Functionen und deren Entwicklung in Reihen.

1) Eine Function einer oder mehrerer Grössen wird jeder mathematische Ausdruck genannt, der diese Grössen entweder allein oder in Verbindung mit andern constanten oder veränderlichen Grössen enthält. Der Kürze halber schreibt man statt Function nur f oder F , oder φ oder f' ... und lässt diesen Functionszeichen jene Grössen folgen, deren Function bezeichnet werden soll. So z. B. ist $a^x \lg. (a+bx)$ eine Function von x , man kann sie bezeichnen durch $f(x)$ oder durch $F(x)$, u. s. w.

Bezeichnet $f(x)$ den Ausdruck $a^x \lg. (a+bx)$, so ist $f(y)$ das symbolische Zeichen für den Ausdruck $a^y \lg. (a+by)$, und $f(x+y)$ ist das Zeichen für $a^{x+y} \lg. [a+b(x+y)]$.

Enthält eine Function mehr als eine veränderliche Grösse, so lässt man die veränderlichen Grössen dem Functionszeichen folgen. So kann man den Ausdruck $x \lg. y + y^2 \sqrt{x+a}$ durch $f(x,y)$ oder durch $\varphi(x,y)$ u. s. w. bezeichnen.

Alle Functionen, welche in der Analysis in Betracht kommen, zerfallen in algebraische und transcendente Functionen. Die einfachsten Formen der algebraischen Functionen sind:

$$m+x, m-x, mx, \frac{m}{x}, x^m,$$

sie sind sämmtlich specielle Fälle des allgemeinen Ausdruckes

$$\frac{(Ax^\alpha + Bx^\beta + \dots)^m}{(Px^a + Qx^b + \dots)^n};$$

die einfachsten Formen der transcendenten Functionen sind

$$a^x, \lg x, \sin x, \cos x.$$

Es bilden diese Functionen sammt ihren Combinationen, Verbindungen, Wiederholungen und den durch Substitutionen aus ihnen zu erreichenden Formen, den Gegenstand der rein analytischen Untersuchungen.

2) Die Entwicklung der Functionen in Reihen, geordnet nach den Potenzen der Veränderlichen, ist eine der wichtigeren Aufgaben der Analysis, sie gibt eines der wirksamsten Mittel ab zum Studium der Eigenschaften, der Natur und des Zusammenhangs der verschiedenen Functionen. Da überdiess in dieser Anleitung zur Differentialrechnung häufig auf die Reihenentwicklung der Functionen zurückgegangen wird, so soll hier in der Einleitung eine der kürzeren Methoden, welche die Analysis für solche Entwicklungen aufgefunden hat, näher bezeichnet und benutzt werden, nämlich die der unbestimmten Coefficienten.

Diese Methode geht von dem Satze aus, dass in zwei einander gleichen Reihen $A+Bx+Cx^2+\dots$ und $P+Qx+Rx^2+\dots$, auch die Vorzahlen gleicher Potenzen einander gleich sind, dass also, wenn

$A+Bx+Cx^2+\dots = P+Qx+Rx^2+\dots$,
auch $A=P$, $B=Q$, $C=R$, ... ist. In der That erhält man $A=P$, wenn man $x=0$ setzt, es ist daher auch

$Bx+Cx^2+\dots = Qx+Rx^2+\dots$,
folglich:

$$B+Cx+\dots = Q+Rx+\dots$$

Setzt man wieder $x=0$, so findet man $B=Q$ u. s. w.

Die Benutzung dieses Satzes zur Entwicklung der Functionen in Reihen stützt sich auf die Voraussetzung, dass eine jede Function $f(x)$ sich in eine nach den Potenzen von x fortlaufende Reihe, in eine Reihe von der Form $A+Bx+Cx^2+\dots$, entwickeln lasse, und dass diese Reihe namentlich in dem speciellen Falle, in welchem x verschwindend klein oder Null wird, gültig bleibe. Lässt man diese Voraussetzung zu, so hat die

Lösung der bezeichneten Aufgabe keine Schwierigkeit, dagegen allerdings die Beschränkung, die die Voraussetzung mit sich bringt, und den Nachtheil, dass man sprungweise zu Resultaten kömmt, die, gestützt auf eine feinere Analyse der Natur der Functionen, direct erreicht werden können und hiermit zugleich eine weit tiefere Einsicht in das Wesen der Reihenentwicklung gewähren. Wenn dennoch hier die Methode der unbestimmten Coefficienten gebraucht wird, so darf nicht erst bemerkt werden, dass es nur geschieht um einige Resultate der Analysis, die in der Begründung der Differentialrechnung zur Anwendung kommen, auf dem kürzesten Wege zu reproduciren. In dem Folgenden wird diese Methode nur auf transcendente Functionen angewendet, weil die Entwicklung der algebraischen Functionen nach dem, selbst in den Elementen der Algebra aufgenommenen, Binominal - und Polynominal - Theorem als bekannt vorausgesetzt wird.

3) Entwicklung der Exponential-Grössen in Reihen. Die Aufgabe besteht hier darin: eine Grösse von der Form a^x in eine Reihe, geordnet nach den Potenzen von x , zu entwickeln. Die Form dieser Reihe wird sein $a^x = A + Bx + Cx^2 + \dots$, es wird nur darauf ankommen die Werthe der Vorzahlen $A, B, C \dots$ zu bestimmen. Da diese Reihe für jeden Werth von x gültig ist, also auch für $x = 0$, so hat man $a^0 = A$, daher $A = 1$, es wird hierdurch:

$$a^x = 1 + Bx + Cx^2 + \dots$$

$$\text{Ebenso ist } a^y = 1 + By + Cy^2 + \dots,$$

$$\text{und } a^{x+y} = 1 + B(x+y) + C(x+y)^2 + \dots,$$

$$\text{es ist aber auch } a^{x+y} = (1 + Bx + Cx^2 + \dots)(1 + By + Cy^2 + \dots),$$

$$\text{daher } (1 + Bx + Cx^2 + \dots)(1 + By + Cy^2 + \dots) = 1 + B(x+y) + C(x+y)^2 + \dots$$

Führt man die auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens angezeigten Multiplicationen aus, ordnet man die Glieder nach den Potenzen von x , und erwägt man dass die Vorzahlen gleicher Potenzen von x gleich sind, so erhält man:

$$B + yB^2 + y^2BC + y^3BD + \dots = B + y^2C + y^23D + y^34E + \dots$$

Auch hier sind die Vorzahlen gleicher Potenzen der Veränderlichen einander gleich, man erhält hieraus:

$$C = \frac{B^2}{2}, D = \frac{B^3}{1.2.3}, E = \frac{B^4}{1.2.3.4}, \dots \text{ es wird hierdurch}$$

$$1) a^x = 1 + Bx + \frac{B^2 x^2}{1.2} + \frac{B^3 x^3}{1.2.3} + \dots$$

4) Entwicklung der Logarithmen in Reihen. Die allgemeine Form der Reihe, welche den Werth von $\lg. (1+x)$ ausdrückt, wird sein $\lg. (1+x) = M + Nx^1 + Px^2 + Qx^3 + \dots$. Setzt man $x=0$, so findet man: $\lg. 1 = M$, daher $M=0$, es sind also nur die Werthe der Vorzahlen $N, P, Q \dots$ zu bestimmen. Wenn die Basis des hier vorgelegten Logarithmensystems a ist, so folgt aus der Gleichung $\lg. (1+x) = Nx + Px^2 + Qx^3 + \dots$ dass:

$$1+x = a^{Nx + Px^2 + Qx^3 + \dots}$$

Setzt man in der Gleichung (1) $Nx + Px^2 + Qx^3 + \dots$ statt x , so erhält man:

$$a^{Nx + Px^2 + Qx^3 + \dots} = 1 + B(Nx + Px^2 + \dots) + \frac{B^2}{1.2} (Nx + Px^2 + \dots)^2 + \dots$$

es ist daher:

$$1+x = 1 + B(Nx + Px^2 + \dots) + \frac{B^2}{1.2} (Nx + Px^2 + \dots)^2 + \frac{B^3}{1.2.3} (Nx + Px^2 + \dots)^3 + \dots$$

Entwickelt man die Polynomien und setzt man die Vorzahlen gleicher Potenzen einander gleich, so findet man:

$$N = \frac{1}{B}, P = -\frac{1}{2B}, Q = \frac{1}{3B}, \dots$$

man erhält hierdurch:

$$2) \lg. (1+x) = \frac{1}{B} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right)$$

Ueber den Werth von x kann man nach Willkür verfügen, setzt man etwa $x=a-1$, also $1+x=a$ oder gleich der Basis des Logarithmensystems, so erhält man:

$$1 = \frac{1}{B} \left((a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \dots \right) \text{ daher}$$

$$3) B = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \dots$$

Setzt man in der Gleichung (2) $-x$ statt $+x$, so erhält man:

$$\lg. (1-x) = \frac{1}{B} \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \right)$$

Zieht man diese Gleichung von der Gleichung (2) ab, so findet man:

$$4) \lg. \frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{B} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$

Setzt man hierin $\frac{1+x}{1-x} = a$, also $x = \frac{a-1}{a+1}$, so findet man:

$$5) B = 2 \left(\frac{a-1}{a+1} + \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^5 \cdot \frac{1}{5} + \dots \right)$$

Diese Reihe ist convergent und daher zur Bestimmung des Werthes von B, wenn man auf Zahlenwerthe von a zurückgeht, weit geeigneter, als die Gleichung (3).

Ein specieller Fall ist seiner häufigen Anwendungen halber besonders hervorzuheben. Setzt man nämlich in der Formel (1)

$x=1$, so erhält man: $a = 1 + \frac{B}{1} + \frac{B^2}{1.2} + \dots$; man kann durch diese Gleichung den Werth von a bestimmen, wenn der von B gegeben ist; setzt man etwa $B=1$, so erhält man:

$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots = 2,71828182845 \dots$$

man bezeichnet diese Zahl durch e, und bemerkt, dass hiermit der Werth von a für den speciellen Fall $B=1$ festgehalten ist. Es ist hiernach

$$6) e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

Nimmt man e zur logarithmischen Basis, so heissen die Logarithmen dieser Basis natürliche oder hyperbolische Logarithmen, man bezeichnet dieselben dadurch, dass man nat. nach den Buchstaben lg. folgen lässt. Nach der Gleichung (2) erhält man, indem man berücksichtigt, dass für natürliche Logarithmen $B=1$ ist,

$$7) \lg. \text{ nat. } (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

es ist daher $\lg. (1+x) = \frac{1}{B} \cdot \lg. \text{ nat. } (1+x)$, folglich

$B = \frac{\lg. \text{ nat. } (1+x)}{\lg. (1+x)}$, setzt man hierin $1+x=a$, so wird $\lg. (1+x) = \lg. a = 1$, daher $B = \lg. \text{ nat. } a$. Hierdurch geht die Gleichung (1) in folgende über:

$$8) a^x = 1 + (\lg. \text{ nat. } a) \frac{x}{1} + (\lg. \text{ nat. } a)^2 \frac{x^2}{1.2} + (\lg. \text{ nat. } a)^3 \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

5) Entwicklung der Kreisfunctionen in Reihen. Man kann hier den ähnlichen Weg wie in §. 3 einschlagen. Die allgemeine Form der Reihen, welche den Werth von $\sin. x$ und $\cos. x$ ausdrücken, sei $\sin. x = A + Bx + Cx^2 + \dots$, und $\cos. x = M + Nx + Px^2 + \dots$. Setzt man $x=0$, so erhält man $\sin. 0 = A$, $\cos. 0 = M$, es muss daher $A=0$, und $M=1$ sein, und man hat $\sin. x = Bx + Cx^2 + \dots$, und $\cos. x = 1 + Nx + Px^2 + \dots$. Für einen sehr kleinen Werth von x ist $\sin. x = x$, da nun die für $\sin. x$ aufgestellte Reihe für jeden Werth von x gültig sein muss, also auch für den Fall, in welchem x sehr klein ist, so erkennt man, dass $B=1$ sein muss. Die Form der Reihen für $\sin. x$ und $\cos. x$ kann hiernach in folgenden Zeichen festgehalten werden:

$$\sin. x = x + ax^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \dots$$

$$\cos. x = 1 + bx + b_1x^2 + b_2x^3 + \dots$$

Es ist bekannt dass: $1 = \sin. x^2 + \cos. x^2$, und ferner dass $\sin. 2x = 2 \sin. x \cos. x$. Führt man in diesen Gleichungen für $\sin. x$, $\cos. x$, und $\sin. 2x$ die oben aufgestellten Reihen ein, so erhält man:

$$1 = (x + ax^2 + a_1x^3 + \dots)^2 + (1 + bx + b_1x^2 + \dots)^2$$

$$2x + a4x^2 + a_18x^3 + \dots = 2(x + ax^2 + a_1x^3 + \dots)(1 + bx + b_1x^2 + \dots)$$

Entwickelt man die Polynomien der ersten dieser Gleichungen und setzt man hierauf die Vorzahlen gleicher Potenzen von x auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich, so erhält man:

$$\alpha. \begin{cases} 2b = 0 \\ 1 + 2b_1 + b^2 = 0 \\ 2a + 2b_2 + 2bb_1 = 0 \\ 2a_1 + a^2 + 2b_3 + 2bb_2 + b_1^2 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Wird die zweite der obigen Gleichungen entwickelt, und setzt man hierauf die Vorzahlen gleicher Potenzen von x einander gleich, so erhält man:

$$\beta. \begin{cases} 4a = 2a + 2b \\ 8a_1 = 2a_1 + 2ab + 2b_1 \\ 16a_2 = 2a_2 + 2a_1b + 2ab_1 + 2b_2 \\ 32a_3 = 2a_3 + 2a_2b + 2a_1b_1 + 2ab_2 + 2b_3 \\ \dots \end{cases}$$

Aus den Gleichungen α und β folgt:

$$b = 0 \quad a = 0$$

$$b_1 = -\frac{1}{2} \quad a_1 = -\frac{1}{1.2.3}$$

$$b_2 = 0 \quad a_2 = 0$$

$$b_3 = \frac{1}{1.2.3.4} \quad a_3 = \frac{1}{1.2.3.4.5}, \text{ u. s. w.}$$

Es ist daher:

$$9) \sin. x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

$$10) \cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots$$

Da alle übrigen Kreisfunctionen durch Sinus und Cosinus sich algebraisch ausdrücken lassen, so ist mit der Entwicklung der beiden genannten Functionen auch die Möglichkeit der Entwicklung aller Kreisfunctionen in Reihen dargelegt.

6) Zusammenhang unter den transcendenten Functionen. Die für die transcendenten Functionen gefundenen Reihen lassen leicht einen merkwürdigen unter diesen Functionen bestehenden Zusammenhang entdecken. Setzt man nämlich in (6) $x\sqrt{-1}$ stat x , so erhält man

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

Multiplicirt man die Gleichung (9) mit $\sqrt{-1}$, und addirt man sie hierauf zur Gleichung (10), so hat man:

$$\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

es ist daher:

$$11) \cos. x + \sqrt{-1} \sin. x = e^{x\sqrt{-1}}.$$

Setzt man hierin $-x$ statt x , so erhält man:

$$12) \cos. x - \sqrt{-1} \sin. x = e^{-x\sqrt{-1}},$$

durch Addition und Subtraction der beiden letzten Gleichungen erhält man:

$$13) \cos. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$14) \sin. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

Man erkennt aus diesen Gleichungen einen zwischen Kreisfunctionen und Exponentialgrössen bestehenden Zusammenhang, und sieht dass es Fälle gibt, in welchen imaginäre Formen der letztern reelle Werthe, in Kreisfunctionen ausgedrückt, besitzen können.

Aus den Gleichungen (11) und (12) folgt dass:

$$\log. \text{ nat. } (\cos. x + \sqrt{-1} \cdot \sin. x) = x \sqrt{-1},$$

$$\log. \text{ nat. } (\cos. x - \sqrt{-1} \cdot \sin. x) = -x \sqrt{-1}.$$

Subtrahirt man die letzte dieser Gleichungen von der ersten, so findet man:

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \text{ nat. } \left(\frac{\cos. x + \sqrt{-1} \cdot \sin. x}{\cos. x - \sqrt{-1} \cdot \sin. x} \right).$$

Dividirt man Zähler und Nenner durch $\cos. x$, so erhält man:

$$15) \quad x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \text{ nat. } \left(\frac{1 + \sqrt{-1} \cdot \text{tg. } x}{1 - \sqrt{-1} \cdot \text{tg. } x} \right).$$

Entwickelt man den Logarithmen nach der Gleichung (4) in eine Reihe, wobei zu beachten ist, dass bei natürlichen Logarithmen $B=1$ gesetzt werden muss, so findet man:

$$16) \quad x = \frac{\text{tg. } x}{1} - \frac{(\text{tg. } x)^3}{3} + \frac{(\text{tg. } x)^5}{5} - \dots$$

Diese Reihe, welche angibt, wie man die Grösse eines Bogens aus der Tangente desselben berechnen kann, wurde von Leibnitz gefunden. Sie kann zur Bestimmung des Verhältnisses vom Kreisumfang zum Radius, den Radius gleich 1 gesetzt, benutzt werden. Es ist nämlich $\text{tg. } \frac{\pi}{4} = 1$. wenn π den halben Kreisumfang bezeichnet, man erhält daher, wenn man $x = \frac{\pi}{4}$ setzt,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

welche Reihe convergent ist, und daher zur Berechnung von $\frac{\pi}{4}$ gebraucht werden kann. Es hält nicht schwer durch einige Substitutionen und Transformationen aus der Gleichung (16) convergentere Reihen zur Bestimmung von π herzustellen, doch ist dies das Geschäft der Analysis und wird hier umgangen.

Differential - Rechnung.

7) **Bezeichnung des Gegenstandes der Untersuchung.** Die Untersuchungen in der Geometrie, in der Mechanik, in der Astronomie und in der theoretischen Physik bieten unzählig viele Fälle dar, in welchen zur Lösung eines Problems die Bestimmung des Verhältnisses der Differenz einer Function zur Differenz ihrer Grundgrösse verlangt wird. Die Differenz einer Function ist die Zunahme derselben für eine bestimmte Zunahme ihrer Grundgrösse. Hat man z. B. $f(x)$ und lässt man x um h zunehmen, so erhält man $f(x+h)$, die Zunahme gegen $f(x)$ ist daher $f(x+h) - f(x)$. Man nennt diese Zunahme die Differenz der Function von x , und hält die zur Bestimmung derselben erforderlichen Operationen durch folgende symbolische Bezeichnung fest:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Die Differenz der Grundgrösse ist in gleicher Bezeichnung $\Delta x = (x+h) - x = h$, und das Verhältniss beider Differenzen zu einander wird sein

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Zähler und Nenner dieses Bruches werden kleiner, wenn h kleiner wird. Wird endlich h verschwindend klein oder Null, so werden auch Zähler und Nenner Null, und der Bruch geht in die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ über. Dieser specielle Fall leistet in allen mathematischen Untersuchungen der Bedeutung halber, die er in den analytischen, in den geometrischen und in den dynamischen Wissenschaften besitzt, den grössten Nutzen. Um ihn von dem allgemeineren Falle, in welchem h einen endlichen Werth hat, zu unterscheiden, schreibt man d statt Δ , und spricht Differential statt Differenz. Es ist hiernach $\frac{df(x)}{dx} = \frac{0}{0}$, und es

handelt sich zunächst darum für die verschiedenen Functionen der Mathematik den jedesmaligen Werth jenes unter einer unbestimmten Form auftretenden Ausdruckes zu ermitteln. So lange x unbestimmt bleibt, wird, wie die spätere Analyse zeigt, $\frac{df(x)}{dx}$ entweder eine constante Grösse, oder, was meist der Fall ist, selbst wieder eine Function von x , die also so fort dem gleichen Algorithmus, wie früher $f(x)$, unterworfen werden kann. Man kommt hierdurch zu einem zweiten Differential, welches in Zeichen durch $\frac{d^2fx}{dx^2}$ ausgedrückt wird. Es ist hiernach an sich klar, was unter $\frac{d^3fx}{dx^3}$, $\frac{d^4fx}{dx^4}$, u. s. w. zu verstehen ist.

Die nächste Aufgabe der Differential - Rechnung besteht darin: die Differentialien aller einfachen Functionen, so wie der Verbindungen, in welchen diese Functionen vorkommen, zu bestimmen. — Es ist zweckmässig bei dieser Untersuchung Functionen von nur einer veränderlichen Grösse von jenen mehrerer veränderlichen Grössen zu unterscheiden, und in beiden Fällen die Differentialien der ersten und dann die der höheren Ordnungen zu bestimmen.

Erster Abschnitt.

Differentiation der Functionen einer veränderlichen Grösse.

8) Bestimmung des ersten Differentials einer Function einer veränderlichen Grösse. Die Differenz einer Function dividirt durch die Differenz ihrer Grundgrösse kann in allen Fällen in zwei Theile zerlegt werden, von denen der eine unabhängig von der Zunahme der Grundgrösse ist, der andere hingegen eben diese Zunahme als Factor enthält. In Zeichen lässt sich dies auf folgende Weise ausdrücken:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f_1(x) + h\phi F_1(x)$$

wo $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ Functionen sind, welche von der Beschaffenheit von $f(x)$ abhängen. Nur in dem einzigen Falle, in welchem $f(x) = ax + b$ ist, wird der von h unabhängige durch $f_1(x)$ bezeichnete Theil eine constante also eine von x unabhängige Grösse. Diese für die Entwicklung der Differentialien so wichtige Wahrheit ist eine Folge einer allgemeinen Eigenschaft aller Functionen, nach welcher eine jede Function $f(x+h)$, so lange x unbestimmt bleibt, oder so lange für x nur solche Werthe gesetzt werden, die innerhalb der Continuität der Function liegen, sich stets durch eine nach den Potenzen von h fortschreitende Reihe in der Art ausdrücken lässt, dass man hat

$$f(x+h) = f(x) + f_1(x)h + f_2(x)h^2 + f_3(x)h^3 + \dots$$

In der That wird dieser Satz durch den Versuch an allen in der Einleitung bezeichneten einfachen Functionen bestätigt, und ebenso bestätigt er sich an allen Verbindungen jener Functionen. Hiernach ist

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f_1(x) + h(f_2(x) + f_3(x)h + \dots),$$

und wenn man die in Klammern stehende Reihe durch $F(x)$ bezeichnet, so wird:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f_1(x) + hF(x),$$

folglich ist:

$$17) \frac{\Delta f_x}{\Delta x} = f_1(x) + hF(x).$$

Der specielle Fall, in welchem h verschwindend klein oder Null wird, ist hiernach leicht zu beurtheilen, es verschwindet nämlich der mit h als Factor verbundene Theil, und man erhält:

$$18) \frac{df(x)}{dx} = f_1(x).$$

Das Differential einer Function einer veränderlichen Grösse kann demnach stets auf folgende Weise gefunden werden: man bestimmt zuerst die Differenz der Function unter Anwendung der Reihenentwicklung, dividirt durch die Zunahme der Grundgrösse, und setzt hierauf die Zunahme gleich Null. — Man nennt

$\frac{df(x)}{dx}$ den Differentialquotienten von $f(x)$.

9) Differential eines Produktes. Die eben angegebenen Operationen zur Bestimmung des Differentials einer Function sind nicht an eine bestimmte Form der Function gebunden, sie sind ganz allgemein allerwärts anzuwenden, wo es sich um die Entwicklung eines Differentials handelt. Es wäre also zur Bestimmung des Differentials bestimmter Functionen nur nöthig die bezeichnete Ordnung der Operationen zu befolgen, es ist aber nützlich zuvor einige allgemeine Fälle, in welchen die Form der Functionen noch unbestimmt bleibt, zu erörtern.

Zunächst soll das Differential eines Produktes zweier Functionen, nämlich von $F(x) \cdot f(x)$ bestimmt werden. Die Differenz dieses Produktes ist:

$$\Delta[F(x) \cdot f(x)] = F(x+h) \cdot f(x+h) - F(x) \cdot f(x).$$

Es ist aber: $F(x+h) = F(x) + \Delta F(x)$ und $f(x+h) = f(x) + \Delta f(x)$, daher

$$\Delta[F(x) \cdot f(x)] = [F(x) + \Delta F(x)] [f(x) + \Delta f(x)] - F(x) \cdot f(x),$$

hieraus folgt:

$$\Delta[F(x) \cdot f(x)] = F(x) \cdot \Delta f(x) + f(x) \cdot \Delta F(x) + \Delta F(x) \cdot \Delta f(x).$$

Dividirt man durch Δx , so erhält man:

$$\frac{\Delta[F(x) \cdot f(x)]}{\Delta x} = F(x) \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + f(x) \cdot \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \cdot \Delta f(x).$$

Geht man endlich zu dem speciellen Fall über, in welchem Δx gleich Null wird, so hat man:

$$19) \frac{d[F(x) \cdot f(x)]}{dx} = F(x) \cdot \frac{df(x)}{dx} + f(x) \cdot \frac{dF(x)}{dx},$$

denn das Produkt $\frac{dF(x)}{dx} \cdot df(x)$ verschwindet, weil $df(x)$ an und für sich stets gleich Null ist. Es geht hieraus folgende Regel hervor:

Zur Bestimmung des Differentials eines Produktes zweier Functionen in Hinsicht des Differentials der Grundgrösse differentire man zuerst den einen Faktor in Hinsicht der Grundgrösse und multiplicire mit dem andern, hierauf differentire man den andern Faktor in Hinsicht der Grundgrösse und multiplicire mit dem ersten ungeänderten Faktor. Die Summe beider so erhaltenen Produkte ist das gesuchte Differential.

Es ist nach dem Bisherigen leicht zu beweisen, dass:

$$\frac{d[F(x) \cdot f(x) \cdot \varphi(x)]}{dx} = F(x) \cdot f(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} + F(x) \cdot \frac{df(x)}{dx} \cdot \varphi(x) + \frac{dF(x)}{dx} \cdot f(x) \cdot \varphi(x),$$

und ebenso lässt sich leicht übersehen, wie zu verfahren ist, wenn das Differential von vier und mehreren Faktoren bestimmt werden soll.

Die Bestimmung des Differentials eines Quotienten schliesst sich an die eines Produktes an, denn es ist:

$$d \frac{F(x)}{f(x)} = d \left(F(x) \cdot [f(x)]^{-1} \right)$$

daher:

$$20) \frac{d \frac{F(x)}{f(x)}}{dx} = \frac{f(x) \frac{dF(x)}{dx} - F(x) \frac{df(x)}{dx}}{[f(x)]^2}.$$

Der Differentialquotient eines Bruches ist daher gleich dem Differentialquotienten des Zählers multiplicirt mit dem Nenner, weniger dem Differentialquotienten des Nenners multiplicirt mit dem Zähler, und der Unterschied beider Produkte ist durch das Quadrat des Nenners zu dividiren.

10) Differentiation algebraischer Functionen. Eine der einfachsten Formen der algebraischen Functionen ist x^n . Die Differenz derselben in Hinsicht der Differenz der Grundgrösse ist

$$\frac{\Delta x^n}{\Delta x} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Entwickelt man das Binomium und führt man die angezeigte Division aus, so erhält man:

$$\frac{\Delta x^n}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} h + \frac{n \cdot (n-1) (n-2)}{1.2.3} x^{n-3} h^2 + \dots$$

Geht man zu dem speciellen Fall über, in welchem $h=0$ wird, so hat man:

$$\frac{d \cdot x^n}{dx} = nx^{n-1},$$

oder

$$21) d \cdot x^n = nx^{n-1} dx.$$

Hieraus geht hervor, dass das Differential der n ten Potenz einer veränderlichen x gleich ist dem Produkt aus dem ungeänderten Exponenten n in die ursprüngliche Function mit einem

um die Einheit verminderten Exponenten, welches Produkt mit dx zu multipliciren ist.

Das Differential von ax^n wird sein $anx^{n-1}dx$, denn da der Factor a eine unveränderliche Grösse ist, so wird auf ihn die Operation des Differentirens von keinem Einfluss sein, der Factor wird daher in dem Differential ungeändert auftreten.

Das Differential eines Polynomius $a + bx^m + cx^n + \dots$ kann in gleicher Art aus der Differenz bestimmt werden, es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(a + bx^m + cx^n + \dots)}{\Delta x} &= \frac{(a + b(x+h)^m + c(x+h)^n + \dots) - (a + bx^m + cx^n + \dots)}{h} \\ &= b \frac{(x+h)^m - x^m}{h} + c \frac{(x+h)^n - x^n}{h} + \dots \\ &= b \frac{\Delta x^m}{\Delta x} + c \frac{\Delta x^n}{\Delta x} + \dots, \end{aligned}$$

daher:

$$\frac{d(a + bx^m + cx^n + \dots)}{dx} = b \frac{d.x^m}{dx} + c \frac{d.x^n}{dx} + \dots$$

Hieraus erhält man:

$$d(a + bx^m + cx^n + \dots) = bmx^{m-1}dx + cnx^{n-1}dx + \dots$$

Um das Differential von $(a + bx^m + cx^n + \dots)^p$ zu bestimmen, kann man $a + bx^m + cx^n + \dots = z$ setzen, man erhält dann $d.z^p = pz^{p-1}dz$, und findet, wenn man den Werth von z wieder einführt

$d(a + bx^m + cx^n + \dots)^p = p(a + bx^m + cx^n + \dots)^{p-1}(bmx^{m-1} + cnx^{n-1} + \dots)dx$.
— Das Differential eines Produktes oder eines Quotienten wird nach den früher angegebenen Regeln bestimmt, man hat hier-

$$\begin{aligned} d(ax^m + bx^n)(cx^\alpha + fx^\beta) &= (ax^m + bx^n)(c\alpha x^{\alpha-1} + f\beta x^{\beta-1})dx \\ &+ (cx^\alpha + fx^\beta)(am.x^{m-1} + bnx^{n-1})dx. \end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned} d \frac{ax^m + bx^n}{cx^\alpha + fx^\beta} &= \\ \frac{(cx^\alpha + fx^\beta)(am.x^{m-1} + bnx^{n-1}) - (ax^m + bx^n)(c\alpha x^{\alpha-1} + f\beta x^{\beta-1})}{(cx^\alpha + fx^\beta)^2} . dx. \end{aligned}$$

Die bisher gegebenen Vorschriften reichen hin die Differentialien aller algebraischen Functionen zu finden. Es wird daher

sogleich zur Entwicklung der Differentialien transcendenter Functionen fortgegangen.

11) Differentiation transcendenter Functionen. Bei der Aufsuchung der Differentialien transcendenter Functionen hält man den in §. 8 angegebenen Grundgedanken fest, man geht von der Differenz aus und geht zu den Differential über. Die Differenz der transcendenten Function a^x ist:

$$\frac{\Delta a^x}{\Delta x} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x(a^h - 1)}{h}.$$

Entwickelt man a^h nach der Gleichung No. 8. und führt man die angedeutete Division aus, so erhält man:

$$\frac{\Delta a^x}{\Delta x} = a^x (\log. \text{nat. } a + h \frac{(\log. \text{nat. } a)^2}{1.2} + h^2 \frac{(\log. \text{nat. } a)^3}{1.2.3} + \dots).$$

Setzt man $h=0$, so erhält man:

$$\frac{d.a^x}{dx} = a^x \log. \text{nat. } a,$$

hieraus folgt:

$$22) d.a^x = a^x \log. \text{nat. } a . dx.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann das Differential einer jeden Exponential-Grösse mit veränderlichen Exponenten bestimmt werden.

Die Differenz von $\lg. x$ ist:

$$\frac{\Delta \lg. x}{\Delta x} = \frac{\lg. (x+h) - \lg. x}{h} = \frac{\lg. \left(\frac{x+h}{x} \right)}{h} = \frac{\lg. \left(1 + \frac{h}{x} \right)}{h}.$$

Entwickelt man $\lg \left(1 + \frac{h}{x} \right)$ nach der Gleichung No. 7. in eine Reihe, und dividirt man durch h , so erhält man:

$$\frac{\Delta \lg. x}{\Delta x} = \frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{h^2}{x^3} \cdot \frac{1}{3} - \dots$$

Setzt man $h=0$, so erhält man: $\frac{d \lg. x}{dx} = \frac{1}{x}$, und hieraus:

$$23) d \lg. x = \frac{dx}{x}.$$

Es wurde hierbei vorausgesetzt, dass die Basis der Logarithmen e sei, dass man es also mit natürlichen Logarithmen zu thun habe, und dies ist bei allen folgenden Untersuchungen

in welchen Logarithmen gebraucht werden, der Fall, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird.

Es ist leicht einzusehen, dass mit Hülfe der oben entwickelten Formel das Differential eines jeden Logarithmen bestimmt werden kann. So ist $d \lg. (a + bx) = \frac{b dx}{a + bx}$, und $d \lg. (a + bx)(c + fx) = \frac{b dx}{a + bx} + \frac{f dx}{c + fx}$, u. s. w.

Sollte das Differential eines Logarithmen bestimmt werden, dessen Basis nicht e sondern etwa a ist, so hat man sich nur zu erinnern, dass $\lg. x = \frac{\lg. \text{nat. } x}{\lg. \text{nat. } a}$, es ist daher $d \lg. x = \frac{dx}{x \cdot \lg. \text{nat. } a}$.

Es ist noch übrig die Differentialien der Kreisfunctionen zu bestimmen. Auch hierbei ist stets derselbe Weg zu befolgen. Es ist:

$$\frac{\Delta \sin. x}{\Delta x} = \frac{\sin. (x+h) - \sin. x}{h} = \frac{\sin. x \cos. h + \cos. x \sin. h - \sin. x}{h}.$$

Entwickelt man $\sin h$ und $\cos h$ nach No. 9 und 10 in Reihen und führt man die angezeigte Division aus, so erhält man:

$$\frac{\Delta \sin. x}{\Delta x} = \sin. x \left(-\frac{h}{1.2} + \frac{h^3}{1.2.3.4} - \dots \right) + \cos. x \left(1 - \frac{h^2}{1.2.3} + \dots \right)$$

Setzt man $h=0$, so erhält man: $\frac{d \sin. x}{dx} = \cos. x$, und hieraus

$$24) \quad d \sin. x = \cos. x \cdot dx.$$

Die Differenz von $\cos. x$ ist in folgender Gleichung ausgedrückt:

$$\frac{\Delta \cos. x}{\Delta x} = \frac{\cos. (x+h) - \cos. x}{h} = \frac{\cos. x \cos. h - \sin. x \sin. h - \cos. x}{h}.$$

Entwickelt man auch hierin $\cos h$ und $\sin h$ in Reihen und dividirt man hierauf durch h , so erhält man:

$$\frac{\Delta \cos. x}{\Delta x} = \cos. x \left(-\frac{h}{1.2} + \frac{h^3}{1.2.3.4} - \dots \right) - \sin. x \left(1 - \frac{h^2}{1.2.3} + \dots \right)$$

setzt man $h=0$, so erhält man $\frac{d \cos. x}{dx} = -\sin. x$, und hieraus

$$25) \quad d \cos. x = -\sin. x \cdot dx.$$

Mit Hülfe der Gleichungen 24 und 25 lassen sich leicht die Differentialien der übrigen Kreisfunctionen bestimmen; man findet:

$$26) \quad d \operatorname{tg.} x = \frac{dx}{\cos. x^2}$$

$$27) \quad d \cot. x = - \frac{dx}{\sin. x^2}$$

$$28) \quad d \sec. x = \frac{\sin. x}{\cos. x^2} dx$$

$$29) \quad d \overset{\text{cosec}}{\cos.} x = - \frac{\cos. x}{\sin. x^2} \cdot dx$$

Es können die eben entwickelten Gleichungen benützt werden um die Differentialien von Bogen zu finden, deren Sinusse, Cosinusse, Tangenten u. s. w. gegeben sind. Soll etwa das Differential von y bestimmt werden, wenn bekannt ist, dass $y = \operatorname{Arc.} (\sin. = x)$, so verfährt man in folgender Weise. Aus der gegebenen Gleichung folgt $x = \sin. y$, es ist daher $dx = \cos. y \, dy$, folglich $dy = \frac{dx}{\cos. y} = \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin. y^2}}$, führt man den Werth von $\sin. y$ ein, so findet man dy oder

$$30) \quad d \operatorname{Arc.} (\sin. = x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Hat man hingegen $y = \operatorname{Arc.} (\cos. = x)$, so findet man durch ähnliche Rechnung dy oder

$$31) \quad d \operatorname{Arc.} (\cos. = x) = - \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ist $y = \operatorname{Arc.} (\operatorname{tg.} = x)$, so findet man dy oder

$$32) \quad d \operatorname{Arc.} (\operatorname{tg.} = x) = \frac{dx}{1 + x^2}$$

Auf ähnliche Weise findet man:

$$33) \quad d \operatorname{Arc.} (\cot. = x) = - \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$34) \quad d \operatorname{Arc.} (\sec = x) = \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$35) \quad d \operatorname{Arc.} (\operatorname{cosec} = x) = - \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

12) Differentiation der Functionen von Functionen. Nicht selten ist die Grundgrösse einer Function selbst eine Function einer veränderlichen Grösse, wie z. B. in den Ausdrücken $\lg. (\sqrt{x + ax^2})$, $\lg. \sin. x$, $a^x + bx^2$ u. s. w. Einer der einfachsten Fälle dieser Art wurde schon in §. 10 behandelt,

es hält indess nicht schwer die Regeln der Differentiation für diese Fälle ganz allgemein zu entwickeln. Die Form solcher Functionen, in allgemeinen Zeichen ausgedrückt, ist $f f(x)$. Setzt man $f(x) = z$, so hat man $f f(x) = f(z)$. Durch Differentiation erhält man nach No. 18. $\frac{df(z)}{dz} = \varphi(z)$, es ist daher $df(z) = \frac{df(z)}{dz} \cdot dz$. Führt man den Werth von z wieder ein, so findet man $dff(x) = \frac{dff(x)}{df(x)} \cdot df(x)$, es ist aber $dfx = \frac{dfx}{dx} dx$, daher

$$36) dff(x) = \frac{dff(x)}{df(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} \cdot dx$$

Man verfährt daher bei der Differentiation so, als wenn $f(x)$ für sich eine veränderliche Grösse wäre, und sucht unter dieser Voraussetzung den Differentialquotienten von $ff(x)$; man sucht hierauf den Differentialquotienten von $f(x)$, das Produkt beider ist der Differentialquotient von $ff(x)$. — Wäre z. B. das Differential von $\lg. (\sqrt{x} + ax^2)$ zu bestimmen, so setzt man $\sqrt{x} + ax^2 = z$, man erhält:

$$d \lg. (\sqrt{x} + ax^2) = \frac{d \lg. z}{dz} dz = \frac{1}{z} dz$$

es ist aber

$$dz = \frac{d(\sqrt{x} + ax^2)}{dx} \cdot dx = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2ax\right) dx,$$

führt man diesen Werth und den von z ein, so findet man:

$$d \lg. (\sqrt{x} + ax^2) = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2ax}{\sqrt{x} + ax^2} \cdot dx$$

Ebenso findet man:

$$d \lg. \sin. x = \frac{\cos. x}{\sin. x} \cdot dx = \cot. x dx$$

und

$$d a^{x+bx^2} = a^{x+bx^2} \lg. a \cdot \frac{d(x+bx^2)}{dx} dx = a^{x+bx^2} \lg. a (1+2bx) dx$$

Bei Bestimmung des Differentials von $fff(x)$ verfährt man ganz auf die oben gelehrt Weise, man betrachtet zuerst $ff(x)$ als eine veränderliche Grösse, dann $f(x)$ und endlich x ; man erhält hierdurch, in Zeichen ausgedrückt, folgenden Werth des Differentials

$$dfff(x) = \frac{dfff(x)}{dff(x)} \cdot \frac{dff(x)}{df(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} \cdot dx$$

u. s. w.

13) Eine besondere Bemerkung verlangt die Entwicklung des Differentials einer Function von der Form x^x . Es können hierzu verschiedene Wege eingeschlagen werden; es wird aber zweckmässig sein, sich an die bisherige Darstellungsart zu halten. Bestimmt man also zunächst die Differenz, so findet man:

$$\begin{aligned}\Delta x^x &= (x+h)^{x+h} - x^x = x^x + h + (x+h) \cdot x^{x+h-1} h \\ &+ \frac{(x+h)(x+h-1)}{1 \cdot 2} x^{x+h-2} h^2 + \dots - x^x = x^x + h + (x+h) \cdot x^{x+h-1} h \\ &+ \frac{(x+h)(x+h-1)}{1 \cdot 2} x^{x+h-2} h^2 + \dots\end{aligned}$$

Es ist daher

$$\frac{\Delta x^x}{\Delta x} = \frac{x^{x+h} - x^x}{h} + (x+h)x^{x+h-1} + h \left(\frac{(x+h)(x+h-1)}{1 \cdot 2} x^{x+h-2} + \dots \right)$$

Nach §. 11 ist aber

$$\frac{x^{x+h} - x^x}{h} = x^x \left(\lg. \text{ nat. } x + h \frac{(\lg. \text{ nat. } x)^2}{1 \cdot 2} + \dots \right),$$

es wird hierdurch

$$\begin{aligned}\frac{\Delta x^x}{\Delta x} &= x^x \left(\lg. \text{ nat. } x + h \frac{(\lg. \text{ nat. } x)^2}{1 \cdot 2} + \dots \right) + (x+h)x^{x+h-1} \\ &+ h \left(\frac{(x+h)(x+h-1)}{1 \cdot 2} x^{x+h-2} + \dots \right)\end{aligned}$$

Setzt man $h = 0$. so erhält man:

$$\frac{dx^x}{dx} = x^x \lg. \text{ nat. } x + x \cdot x^{x-1}$$

Es ist daher

$$37) dx^x = x^x \lg. \text{ nat. } x \cdot dx + x \cdot x^{x-1} dx$$

Das Differential von x^x besteht also aus zwei Theilen, der eine Theil ist das Differential von x^x so genommen, als wenn nur der Exponent x veränderlich wäre, der andere ist das Differential derselben Grösse, jedoch so genommen, als wenn nur die Basis x veränderlich wäre.

14) Differentiation unentwickelter Functionen. Wenn zwei veränderliche Grössen x und y durch eine Gleichung mit einander verbunden sind, so kann nur die eine als ursprünglich veränderliche Grösse betrachtet werden; denn die Veränderungen der andern hängen von den Veränderungen der ersten in

einer Weise ab, die die Natur der Gleichung näher bezeichnet. Ist die Gleichung nicht entwickelt, d. h. ist die eine der Veränderlichen nicht gesondert als eine Function der andern dargestellt, so nennt man dies eine unentwickelte Function. So ist z. B. $x^2y + 3y^5 + 4x\sqrt{y} - 12 = 0$ eine unentwickelte Function der Grösse y von x , oder der Grösse x von y . Die allgemeine Form solcher unentwickelten Functionen ist $f(x,y) = 0$. Es handelt sich darum das Differential derselben zu bestimmen.

Zunächst ist leicht zu erkennen, dass das Differential von $f(x,y) = 0$ ebenfalls gleich Null sein werde; denn da y jedenfalls eine Function von x ist, so kann man setzen $y = f(x)$, man erhält hierdurch $f[x, f(x)] = 0$. Diese Gleichung ist für jeden Werth von x gültig; es ist daher $f[x+h, f(x+h)] = 0$ folglich auch $\Delta f[x, f(x)]$ oder $\Delta f(x,y) = 0$; es folgt aber hieraus weiter, dass $\frac{\Delta f(x,y)}{\Delta x} = 0$, und wenn man zum Differential übergeht dass $\frac{df(x,y)}{dx} = 0$ ist.

Die Bestimmung des Differentials einer speciell vorgelegten Gleichung kann keine Schwierigkeit darbieten; denn erinnert man sich, dass y jedenfalls eine Function von x ist, so erkennt man, dass die früher entwickelten Regeln zur Bestimmung des Differentials hinreichend sind. Sollte z. B. das Differential von $x^2y + 3y^5 + 4x\sqrt{y} - 12 = 0$ bestimmt werden, so findet man $2x dx y + x^2 dy + 15y^4 dy + 4dx\sqrt{y} + \frac{2x dy}{\sqrt{y}} = 0$, und hieraus erhält man $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + 4\sqrt{y}}{x^2 + 15y^4 + 2x\sqrt{y}}$.

Der Zähler dieses Bruches ist der Differentialquotient der vorgelegten Gleichung in Hinsicht x , und der Nenner ist der Differentialquotient in Hinsicht y .

Man kann indess auch ganz allgemein eine Formel zur Bestimmung des Werthes von $\frac{dy}{dx}$ entwickeln. Ist nämlich $f(x,y) = 0$ gegeben, so ist auch $f(x+h, y+k) = 0$, wo k die Zunahme bezeichnet, welche y erfährt, wenn x um h zugenom-

men hat. Entwickelt man $f(x,y) = 0$ in eine Reihe geordnet nach den Potenzen von x , so ist die Form derselben

$$f(x,y) = A + Bx + Cx^2 \dots = 0.$$

Hierin bezeichnen die Grössen $A, B, C \dots$ irgend welche Functionen von y , so dass man schreiben kann

$$f(x,y) = \varphi(y) + \varphi_1(y) \cdot x + \varphi_2(y) x^2 + \varphi_3(y) x^3 + \dots = 0.$$

Es wird daher auch sein:

$$f(x+h,y+k) = \varphi(y+k) + \varphi_1(y+k)(x+h) + \varphi_2(y+k)(x+h)^2 + \dots = 0$$

Entwickelt man die Binomien $x+h$ dieser letzten Gleichung, so erhält man:

$$f(x+h,y+k) = \varphi(y+k) + \varphi_1(y+k)x + \varphi_2(y+k)x^2 + \dots + hF(x,y) = 0$$

Es ist aber:

$$\varphi(y+k) + \varphi_1(y+k)x + \varphi_2(y+k)x^2 + \dots = f(x,y+k),$$

$$\text{daher} \quad f(x+h,y+k) = f(x,y+k) + hF(x,y) = 0.$$

Hieraus erhält man:

$$F(x,y) = \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y+k)}{h} = \frac{\Delta f(x,y+k)}{\Delta x}$$

wobei man zu bemerken hat, dass in dem Ausdruck $\Delta f(x,y+k)$ nur x als veränderlich zu betrachten ist.

Führt man diesen Werth in der früheren Gleichung ein, so erhält man:

$$f(x+h,y+k) = f(x,y+k) + h \cdot \frac{\Delta f(x,y+k)}{\Delta x} = 0$$

Die Differenz von $f(x,y) = 0$ ist nun endlich

$$f(x+h,y+k) - f(x,y) = f(x,y+k) + h \cdot \frac{\Delta f(x,y+k)}{\Delta x} - f(x,y) = 0.$$

Berücksichtigt man, dass

$$f(x,y+k) - f(x,y) = \frac{\Delta f(x,y)}{\Delta y} \cdot \Delta y \text{ und } h = \Delta x \text{ ist,}$$

so erhält man:

$$\frac{\Delta f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x,y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta f(x,y+k)}{\Delta x} = 0$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\frac{\Delta f(x,y+k)}{\Delta x}}{\frac{\Delta f(x,y)}{\Delta y}}$$

Setzt man $h = 0$, so wird auch $k = 0$, und man erhält:

$$38) \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{df(x,y)}{dx}}{\frac{df(x,y)}{dy}}$$

Wäre z. B. der aus der Gleichung $\sin. 2x - \log. (x+y) + y^2x^3 = 0$ sich ergebende Werth von $\frac{dy}{dx}$ zu bestimmen, so würde man zunächst in Hinsicht x , dann in Hinsicht y differenziren, man erhält hierdurch:

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{d(\sin. 2x - \log. (x+y) + y^2x^3)}{dx} = 2 \cos. 2x - \frac{1}{x+y} + 3y^2x^2$$

ferner:

$$\frac{df(x,y)}{dy} = \frac{d(\sin. 2x - \log. (x+y) + y^2x^3)}{dy} = -\frac{1}{x+y} + 2yx^3$$

es wird daher sein

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{2 \cos. 2x - \frac{1}{x+y} + 3y^2x^2}{-\frac{1}{x+y} + 2yx^3}$$

15) Wiederholte Differentiation der Functionen einer veränderlichen Grösse. Es wurde schon im §. 7 angedeutet, dass die Operationen des Differentirens wiederholt werden können, und dass man hierdurch zu den höheren Differentialien der Functionen gelange. Zur Entwicklung derselben reichen die im ersten Abschnitt gegebenen Regeln hin; denn die ersten Differentialien der Functionen einer veränderlichen Grösse sind selbst wieder Functionen derselben Variabeln, deren Differentialien sich sofort nach den gegebenen Vorschriften finden lassen. So ist $\frac{d \cdot x^n}{dx} = nx^{n-1}$. Differentirt man von Neuem, so erhält man:

$$\frac{d \frac{d \cdot x^n}{dx}}{dx} = \frac{d^2 \cdot x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2} \text{ oder } d^2 x^n = n(n-1)x^{n-2}dx^2;$$

differentirt man wieder, so findet man:

$$d^3 x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}, \text{ u. s. w.}$$

Wenn n eine ganze Zahl ist, etwa 3, so erhält man $d^3 x^3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 dx^3$, das vierte und alle höheren Differentialien werden daher verschwinden.

Auf ganz ähnliche Weise wird bei Bestimmung der höheren Differentialien anderer Functionen verfahren. So erhält man für die successiven Differentialien von $\lg. x$ folgende Werthe:

$$d \lg. x = \frac{dx}{x}, d^2 \lg. x = -\frac{1}{x^2} dx^2, d^3 \lg. x = \frac{2}{x^3} dx^3, \dots$$

und bei wiederholter Differentiation von $\sin. x$ erhält man:

$$d \sin. x = \cos. x \cdot dx, d^2 \sin. x = -\sin. x \cdot dx^2, d^3 \sin. x = -\cos. x \cdot dx^3, \dots$$

Es geht hieraus schon genügend hervor, auf welche Weise zu verfahren ist, um die höheren Differentialien irgend welcher Functionen zu bestimmen. Sind die ursprünglichen Functionen sehr zusammengesetzt, so wird die Entwicklung der höheren Differentialien zu vielen Weitläufigkeiten führen; ihre Bestimmung kann aber sonst keine Schwierigkeiten darbieten, indem stets nur wiederholt die Operationen auszuführen sind, die man überhaupt als die Grundoperationen der Differentialrechnung zu betrachten hat. Es wird durchaus überflüssig sein, von zusammengesetzten Functionen die höheren Differentialien hier wirklich zu entwickeln, indem die Wissenschaft hiermit durch keinen Gedanken erweitert, sondern nur durch Formeln bereichert würde, was an sich ein höchst unerheblicher Gewinn ist.

16) Die Darstellung der höheren Differentialien unentwickelter Functionen schliesst sich an das an, was in §. 14 gelehrt wurde. Man bestimmt nämlich zunächst nach No. 38 den Werth von $\frac{dy}{dx}$, den man durch Differentiation der Gleichung $f(x, y) = 0$ erhält, und differentirt hierauf von Neuem, wobei man zu beachten hat, dass x die ursprünglich veränderliche Grösse und daher y eine Function von x ist. In Zeichen ausgedrückt ist das erste Differential:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df(x, y)}{dx}}{\frac{df(x, y)}{dy}}$$

Da $\frac{df(x, y)}{dx}$ und ebenso $\frac{df(x, y)}{dy}$ Functionen von x und y sind, so ist auch der Quotient aus Beiden eine Function von x und y , wobei zugleich, wie aus der gegebenen Gleichung hervorgeht,

y eine Function von x ist. Es wird sich daher das zweite Differential nach den bisher gegebenen Regeln finden lassen. In Zeichen erhält man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{df(x,y)}{dx}}{\frac{df(x,y)}{dy}} \right)$$

und für das dritte Differential hat man:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = - \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{df(x,y)}{dx}}{\frac{df(x,y)}{dy}} \right) \right)$$

u. s. w.

Ein Beispiel wird dies besser erläutern und überdies Veranlassung geben, einige Bemerkungen, die für die Integralrechnung von Nutzen sind, anzuschliessen. Die Gleichung, deren Differentialien gefunden werden sollen, sei $x^3 + ax^2y^2 + by^3 + c = 0$. Man erhält nach No. 38

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{3x^2 + 2axy^2}{2ax^2y + 3by^2}.$$

Differentirt man von Neuem, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= - \frac{d}{dx} \left(\frac{3x^2 + 2axy^2}{2ax^2y + 3by^2} \right) \\ &= - \frac{(2ax^2y + 3by^2) \left(6x + 2ay^2 + 4axy \frac{dy}{dx} \right) - (3x^2 + 2axy^2) \left(4axy + 2ax^2 \frac{dy}{dx} + 6by \frac{dy}{dx} \right)}{(2ax^2y + 3by^2)^2} \end{aligned}$$

Führt man die angezeigten Multiplicationen aus, so findet man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{18bxy^2 + 6aby^4 - 4a^2x^2y^3 + \frac{dy}{dx} (4a^2x^3y^2 - 6ax^4 - 18bx^2y)}{(2ax^2y + 3by^2)^2}$$

Man kann hierin den Werth von $\frac{dy}{dx}$ einführen, und erhält dann für $\frac{d^2y}{dx^2}$ einen Ausdruck, der nur x und y enthält. Würde man die Functionen von x, y, die man so erhält, von Neuem differentiren, wobei man immer wieder x als die ursprünglich veränderliche Grösse zu betrachten hätte, so würde man den Werth von $\frac{d^3y}{dx^3}$ finden u. s. w.

Durch die erste Differentiation der Gleichung $x^3 + ax^2y^2 + by^3 + c = 0$ ist die constante Grösse c verschwunden. Durch

einfache Transformationen der gegebenen Gleichung kann man jede andere der constanten Grössen durch Differentiation zum Verschwinden bringen. Es ist nur nöthig, die Constante, welche verschwinden soll, gesondert darzustellen, und darauf zu differentiren. So erhält man, wenn man durch y^3 dividirt:

$$\frac{x^3}{y^3} + \frac{ax^2}{y} + b + \frac{c}{y^3} = 0,$$

und durch Differentiation findet man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2 + 2axy^2)y}{3x^3 + ax^2y^2 + 3c}$$

Hätte man statt b die Grösse a gesondert dargestellt, so wäre diese durch die erste Differentiation verschwunden. Durch jede folgende Differentiation kann man auf gleiche Weise immer eine der constanten Grössen zum Verschwinden bringen. Man entwickelt nämlich aus der Gleichung für das erste Differential die constante Grösse, welche verschwinden soll, und führt dann die Differentiation aus. Stellt man weiter aus der Gleichung des zweiten Differentiats eine der constanten Grössen gesondert dar, und differentirt man hierauf von Neuem, so verschwindet auch diese Constante u. s. w.

Zweiter Abschnitt.

Differentiation der Functionen zweier und mehrerer veränderlicher Grössen.

17) Differentiation der Functionen zweier veränderlicher Grössen. Die Entwicklung der Differentialien von Functionen zweier von einander unabhängiger veränderlichen Grössen stützt sich auf eben die Idee, welche bei der Differentiation der Functionen einer Veränderlichen festgehalten wurde. Man geht auch hier von der Differenz aus und geht dann zu dem speciellen Fall über, in welchem die Zunahme der Veränderlichen Null wird. Gesetzt es sei $f(x,y)$ die Function, deren

Differential bestimmt werden soll. Die Differenz dieser Function ist :

$$\Delta f(x, y) = f(x + h, y + k) - f(x, y)$$

Hier bezeichnen h und k die Zunahmen der von einander unabhängigen Grössen x und y . Es handelt sich aber nicht darum die Differenz der Functionen an und für sich zu bestimmen, sondern es soll das Verhältniss ermittelt werden, welches diese Differenz zur Differenz der Grundgrössen besitzt. Es ist klar, dass dies in zwei Theile zerfallen wird, wovon der eine das Verhältniss der Differenz der Function zur Differenz von x , der andere das Verhältniss zur Differenz von y ausdrückt. Um dies näher zu begründen, kann man von der Reihenentwicklung ausgehen, es ist nämlich allgemein

$$f(x, y) = \varphi(y) + \varphi_1(y)x + \varphi_2(y)x^2 + \dots$$

daher

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= \varphi(y+k) + \varphi_1(y+k)(x+h) + \varphi_2(y+k)(x+h)^2 + \dots \\ &= \varphi(y+k) + \varphi_1(y+k)x + \varphi_2(y+k)x^2 + \dots + hF(x, y) \end{aligned}$$

Da aber

$$\varphi(y+k) + \varphi_1(y+k)x + \varphi_2(y+k)x^2 + \dots = f(x, y+k),$$

so erhält man:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y+k) + hF(x, y)$$

Hieraus folgt:

$$F(x, y) = \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)}{h}$$

und wenn man diesen Werth einführt, so erhält man:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y+k) + \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)}{h} \cdot h$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung erhält man für die Differenz von $f(x, y)$ folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= f(x, y+k) + \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)}{h} \cdot h - f(x, y) \\ &= \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} \cdot k + \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)}{h} \cdot h \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Zunahme von x durch Δx , und die Zunahme von y durch Δy , so hat man in symbolischen Zeichen:

$$39) \Delta f(x, y) = \frac{\Delta f(x, y)}{\Delta y} \Delta y + \frac{\Delta f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \Delta x$$

wobei zu bemerken ist, dass in dem ersten dieser Theile nur y , und in dem zweiten nur x bei Bestimmung der Differenz als veränderlich zu betrachten ist. Man drückt dies gewöhnlich so aus, dass man sagt: die vollständige Differenz könne in zwei Theile zerlegt werden, in die Differenz in Hinsicht x und die Differenz in Hinsicht y . Geht man zu dem speciellen Fall über, in welchem die Zunahme von x und y Null werden, so erhält man:

$$40) \quad df(x, y) = \frac{df(x, y)}{dx} dx + \frac{df(x, y)}{dy} dy$$

Die Werthe von $\frac{df(x, y)}{dx}$, $\frac{df(x, y)}{dy}$ sind, wie die Ableitung zeigt, so zu bestimmen, dass man in dem ersten Falle nur x , in dem zweiten nur y als veränderlich betrachtet. Man nennt $\frac{df(x, y)}{dx}$, $\frac{df(x, y)}{dy}$ partielle Differentialquotienten. Man erkennt, dass das vollständige Differential einer Function zweier veränderlichen Grössen erhalten wird, wenn man zuerst in Hinsicht der einen, dann in Hinsicht der andern der Veränderlichen differentirt, und die Summe dieser Differentialien nimmt. Durch Beispiele wird dies noch deutlicher werden, so ist

$$\text{I.} \quad d \cdot x^5 y^2 = 5x^4 y^2 dx + 2x^5 y dy$$

$$\text{II.} \quad d \cdot \lg. (x + y)^2 = \frac{2 dx}{(x + y)} + \frac{2 dy}{(x + y)}$$

$$\text{III.} \quad d \cdot x^y = yx^{y-1} dx + x^y \lg. x dy$$

$$\text{IV.} \quad d (\sin. 3x + \cos. y)^2 = 2 (\sin. 3x + \cos. y) (\cos. 3x \cdot dx - \sin. y dy)$$

18) Differentiation der Functionen dreier und mehrerer veränderlichen Grössen. Betrachtet man die Entwicklung der Differenz einer Function zweier veränderlichen Grössen genauer, so erkennt man, dass, um die Unterschiede in Bezug auf jede der veränderlichen Grössen zu erhalten, es nöthig war, die Function $f(x, y+k)$ zu addiren und zu subtrahiren. Es führte hierzu die Reihenentwicklung; es ist aber nützlich, dieses Resultat festzuhalten und bei Bestimmung der Differenz der Functionen mehrerer veränderlicher Grössen in Anwendung zu bringen. Es kann hiernach die Differenz einer Function

dreier veränderlicher Grössen in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\Delta f(x, y, z) &= f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z) \\ &= f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y+k, z+l) \\ &\quad + f(x, y+k, z+l) - f(x, y, z+l) \\ &\quad + f(x, y, z+l) - f(x, y, z)\end{aligned}$$

Bezeichnet man h, k, l durch $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, und bemerkt man, dass $f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y+k, z+l)$ die Differenz der Function $f(x, y+k, z+l)$ in Hinsicht x ausdrückt und in Zeichen durch $\frac{\Delta f(x, y+k, z+l)}{\Delta x} \Delta x$ festgehalten werden kann, dass ferner $f(x, y+k, z+l) - f(x, y, z+l) = \frac{\Delta f(x, y, z+l)}{\Delta y} \Delta y$, u. s. w., so erhält man:

$$41) \Delta f(x, y, z) = \frac{\Delta f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)}{\Delta x} \Delta x + \frac{\Delta f(x, y, z+\Delta z)}{\Delta y} \Delta y + \frac{\Delta f(x, y, z)}{\Delta z} \Delta z$$

Setzt man die Zunahme von x, y und z gleich Null, so erhält man:

$$42) df(x, y, z) = \frac{df(x, y, z)}{dx} dx + \frac{df(x, y, z)}{dy} dy + \frac{df(x, y, z)}{dz} dz$$

Es geht hieraus hervor, dass das Differential einer Function dreier veränderlicher Grössen erhalten wird, wenn man in Hinsicht jeder der Veränderlichen differentirt und die Summe der so erhaltenen Differentialien nimmt. Auch ist klar, dass das Differential einer Function von n veränderlichen Grössen folgende Form haben wird:

$$43) df(x, x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dx_1} dx_1 + \frac{du}{dx_2} dx_2 + \dots + \frac{du}{dx_n} dx_n$$

hier ist der Kürze halber $f(x, x_1, x_2, \dots, x_n) = u$ gesetzt. — Häufig werden die partiellen Differentialquotienten nach dem Vorgange Euler's in Klammern gesetzt, so dass man schreibt $\left(\frac{du}{dx}\right)dx$ statt $\frac{du}{dx} dx$; man beabsichtigt hiermit eine Zweideutigkeit zu vermeiden und näher anzuzeigen, dass du nicht das vollständige Differential, sondern nur das Differential in Hinsicht der darunter angeschriebenen veränderlichen Grösse bezeichnet. Es

gibt Fälle, in welchen es, um Missverständnissen vorzubeugen, zweckmässig ist, jene Bezeichnung zu wählen, in dem in der Formel No. 43 vorliegenden Falle ist es aber überflüssig.

19) Die Darstellung der höheren Differentialien der Functionen mehrerer veränderlichen Grössen macht die Einschaltung einer Untersuchung nöthig über den Einfluss der Ordnung, in welcher wiederholte Differentiationen ausgeführt werden. Es ist diese Untersuchung auch dadurch nöthig, weil sie die Kennzeichen darbietet, aus welcher hervorgeht, ob eine vorgelegte Differentialformel von mehr als einer veränderlichen Grösse durch Differentiation einer Function entstanden sein kann, Kennzeichen, die namentlich in der Integralrechnung von grosser Bedeutung sind.

Nimmt man die Differenz einer Function $f(x,y)$ zuerst in Hinsicht der Grösse x , so erhält man:

$$\Delta_x f(x,y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

nimmt man hiervon die Differenz in Hinsicht y , so erhält man:

$$\Delta_y \Delta_x f(x,y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y)$$

Nimmt man hingegen von der ursprünglichen Function zuerst die Differenz in Hinsicht y , so erhält man:

$$\Delta_y f(x,y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

und wenn man hiervon die Differenz in Hinsicht x nimmt, so findet man:

$$\Delta_x \Delta_y f(x,y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y)$$

Es ist daher

$$44) \Delta_y \Delta_x f(x,y) = \Delta_x \Delta_y f(x,y)$$

Setzt man die Zunahme von x und y gleich Null, so erhält man:

$$45) d_y d_x f(x,y) = d_x d_y f(x,y)$$

d. h. wenn eine Function zweier veränderlichen Grössen zuerst in Hinsicht x und dann in Hinsicht y differentirt wird, so gelangt man zu demselben Resultate, wie wenn man zuerst in Hinsicht y und dann in Hinsicht x differentirt hätte. Da $d_x f(x,y)$

$$= \frac{df(x,y)}{dx} dx, \text{ und } d_y d_x f(x,y) = \frac{d^2 f(x,y)}{dx dy} dx dy, \text{ so kann die}$$

Gleichung No. 45 auch in folgender Form festgehalten werden:

$$46) \quad \frac{d^2 f(x, y)}{dx dy} = \frac{d^2 f(x, y)}{dy dx}$$

Differentirt man von Neuem in Hinsicht x , so erhält man, wenn man den Sinn der eben gefundenen Gleichung beachtet:

$$\frac{d^3 f(x, y)}{dx^2 dy} = \frac{d^3 f(x, y)}{dy dx^2}$$

Es lässt sich sofort leicht beweisen dass:

$$47) \quad \frac{d^{n+m} f(x, y)}{dx^n dy^m} = \frac{d^{n+m} f(x, y)}{dy^m dx^n}$$

Da man nach der Gleichung *No. 40* $df(x, y) = Pdx + Qdy$ hat, wo P und Q die partiellen Differentialquotienten der Function bezeichnen, so folgt nach der Gleichung *No. 46*, dass, wenn man P in Hinsicht y , und Q in Hinsicht x differentirt, man gleiche Resultate erhalte, oder dass sein müsse: $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. Man kann hieraus die Regel entnehmen, dass eine gegebene Differentialformel zweier veränderlicher Grössen nur dann durch Differentiation einer wirklichen Function entstanden ist, wenn die mit dx verbundenen Grössen in Hinsicht y differentirt zu demselben Werth führen, wie der ist, welchen man durch Differentiation in Hinsicht x der mit dy verbundenen Grössen erhält. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist auch bestimmt die vorgelegte Formel nicht unmittelbar durch Differentiation einer Function entstanden.

20) Wenn man die Differenz einer Function dreier veränderlichen Grössen zuerst in Hinsicht der einen, dann in Hinsicht der zweiten und endlich in Hinsicht der dritten der Veränderlichen nimmt, so kommt man nach der Reihe zu folgenden Resultaten:

$$\begin{aligned} \Delta_x f(x, y, z) &= f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z) \\ \Delta_y \Delta_x f(x, y, z) &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z) - f(x, y + \Delta y, z) - f(x + \Delta x, y, z) \\ &\quad + f(x, y, z) \\ \Delta_z \Delta_y \Delta_x f(x, y, z) &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) \\ &\quad - f(x + \Delta x, y, z + \Delta z) + f(x, y, z + \Delta z) - f(x + \Delta x, y + \Delta y, z) \\ &\quad + f(x, y + \Delta y, z) + f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z) \end{aligned}$$

Man mag die Ordnung, nach welcher man die Differenzen nimmt, abändern wie man will, man kommt zum Schlusse immer zum gleichen Resultate, so dass man also hat:

$$\begin{aligned}\triangle_z \triangle_y \triangle_x f(x, y, z) &= \triangle_z \triangle_x \triangle_y f(x, y, z) = \triangle_y \triangle_z \triangle_x f(x, y, z) \\ &= \triangle_y \triangle_x \triangle_z f(x, y, z) = \triangle_x \triangle_z \triangle_y f(x, y, z) = \triangle_x \triangle_y \triangle_z f(x, y, z).\end{aligned}$$

In dem Falle, in welchem man zum Differential übergeht bleibt die Wahrheit ungeändert, so dass also die Ordnung gleichgültig ist, in welcher die Differentiationen ausgeführt werden. Man kann dies allgemein in Zeichen in folgender Weise ausdrücken:

$$\frac{d^{m+n+z}f(x, y, z)}{dx^m dy^n dz^z} = \frac{d^{m+n+z}f(x, y, z)}{dx^m dz^z dy^n} = \dots$$

Auch hieraus lässt sich für Differentialformeln von drei veränderlichen Grössen eine Regel ableiten, nach welcher erkannt wird, ob jene Formeln durch Differentiation einer Function entstanden sein können. Man hat nämlich nach der Gleichung No. 42 $df(x, y, z) = Pdx + Qdy + Rdz$, wo P, Q, R die partiellen Differentialquotienten in Hinsicht x, y und z bezeichnen. Differentirt man P in Hinsicht y und z, Q in Hinsicht x und z, R in Hinsicht x und y, so erlangt man, wie oben gezeigt wurde, gleiche Werthe, man hat daher

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{dP}{dy} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{dQ}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dR}{dy} \right),$$

es wären hier eigentlich noch drei andere Gleichungen hinzuzusetzen, nämlich:

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{dP}{dz} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dQ}{dz} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{dR}{dx} \right),$$

es ist aber nach §. 19

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{dP}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{dP}{dy} \right), \text{ u. s. w.,}$$

d. h. es sind die drei letzten Gleichungen identisch mit den oben verzeichneten, und können daher weggelassen werden. Will man also prüfen, ob eine gegebene Differentialformel durch Differentiation einer Function dreier Veränderlicher entstanden ist, so hat man zunächst zuzusehen ob die oben aufgestellten Gleichungen Statt finden. Man kann jene Gleichungen leicht in die Form bringen, in welcher Euler dieselben aufstellt; es

gehen nämlich aus den obigen Gleichungen unmittelbar folgende hervor:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}, \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$$

und dies sind die von Euler gegebenen Gleichungen.

21) Verfolgt man den im vorhergehenden § eingeschlagenen Weg bei Functionen von vier veränderlichen Grössen, so findet man dass eine viermalige Differentiation, die nach der Reihe in Hinsicht der ersten, der zweiten u. s. w. der Veränderlichen vorgenommen wird, zu demselben Resultate führt, gleichviel in welcher Ordnung in Bezug auf die Veränderlichen man die successiven Differentialien ausführt. Wäre etwa $u = f(x, y, z, t)$, so hätte man:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{d}{dy} \left(\frac{du}{dx} \right) \right) \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dy} \right) \right) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{du}{dx} \right) \right) \right) = \dots \end{aligned}$$

Da vier Grössen 24 Versetzungen geben, so gibt es auch 24 verschiedene Ordnungen der Differentiation, die zu gleichem Resultate führen. Es gibt diese Wahrnehmung wieder Veranlassung, ein Kennzeichen festzustellen, ob eine gegebene Differentialformel von vier Veränderlichen durch Differentiation einer Function entstanden ist. Gesetzt es sei $u = f(x, y, z, t)$, so erhält man durch Differentiation:

$$du = Pdx + Qdy + Rdz + Sdt$$

wo P, Q, R, S die partiellen Differentialquotienten in Hinsicht x, y, z, t bezeichnen. Es ist aber in diesem Falle

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{dP}{dy} \right) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{dQ}{dx} \right) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dy} \left(\frac{dR}{dx} \right) \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{d}{dy} \left(\frac{dS}{dx} \right) \right)$$

Diese Gleichungen werden, wie leicht zu erkennen, erfüllt, wenn:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}, \frac{dP}{dt} = \frac{dS}{dx}, \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}, \frac{dQ}{dt} = \frac{dS}{dy}, \frac{dR}{dt} = \frac{dS}{dz}$$

Finden diese sechs Gleichungen Statt, so kann die Differentialformel durch Differentiation einer Function entstanden sein; sind aber diese Bedingungen nicht erfüllt, so gibt es auch keine Function durch deren Differentiation unmittelbar die Differentialformel $Pdx + Qdy + Rdz + Sdt$ erhalten werden kann.

22) Nach den in den letzten §§ geführten Untersuchungen hat die Darstellung der höheren Differentialien der Functionen zweier und mehrerer Veränderlichen keine Schwierigkeiten. Man kann mit Functionen zweier veränderlichen Grössen beginnen. Man hat nach No. 40

$$df(x,y) = \frac{df(x,y)}{dx} dx + \frac{df(x,y)}{dy} dy$$

Die partiellen Differentialquotienten $\frac{df(x,y)}{dx}$, $\frac{df(x,y)}{dy}$ sind selbst wieder Functionen von x und y , das Differential eines jeden derselben zerfällt daher in zwei Theile, in ein Differential in Hinsicht x und in eines in Hinsicht y . Die wiederholte Differentiation wird daher zu folgendem Ausdrucke führen:

$$\begin{aligned} d^2f(x,y) &= \frac{d^2f(x,y)}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2f(x,y)}{dx dy} dx dy + \frac{d^2f(x,y)}{dy dx} dy dx + \frac{d^2f(x,y)}{dy^2} dy^2 \\ &= \frac{d^2f(x,y)}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2f(x,y)}{dy dx} dy dx + \frac{d^2f(x,y)}{dy^2} dy^2 \end{aligned}$$

Differentirt man von Neuem, so erhält man:

$$\begin{aligned} d^3f(x,y) &= \frac{d^3f(x,y)}{dx^3} dx^3 + 3 \frac{d^3f(x,y)}{dx^2 dy} dx^2 dy + 3 \frac{d^3f(x,y)}{dx dy^2} dx dy^2 \\ &\quad + \frac{d^3f(x,y)}{dy^3} dy^3 \end{aligned}$$

und allgemein findet man, dass:

$$\begin{aligned} 48) \quad d^n f(x,y) &= \frac{d^n f(x,y)}{dx^n} dx^n + n \frac{d^n f(x,y)}{dx^{n-1} dy} dx^{n-1} dy + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \\ &\quad \frac{d^n f(x,y)}{dx^{n-2} dy^2} dx^{n-2} dy^2 + \dots + \frac{d^n f(x,y)}{dy^n} dy^n \end{aligned}$$

Die Entwicklung der höheren Differentialien der Functionen mehrerer veränderlichen Grössen geschieht ganz auf dieselbe Weise. Man hat nur zu beachten, dass die partiellen Differentialquotienten, die man erhält, selbst wieder Functionen mehrerer Veränderlichen sind, und dass daher die wiederholte Differentiation eines Differentialquotienten zu Quotienten führt, deren Zahl gleich ist der Zahl der Veränderlichen. Ordnet man die Resultate, die man erhält, nach der Zahl, in welcher die Differentiationen in Hinsicht der verschiedenen Veränderlichen auszuführen sind, so erkennt man bald das einfache Gesetz, nach welchem die höhern Differentialien fortschreiten. So findet man

für eine Function $f(x,y,z)$, die der Kürze halber mit u bezeichnet werden soll,

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz$$

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2u}{dx dy} dx dy + 2 \frac{d^2u}{dx dz} dx dz + \frac{d^2u}{dy^2} dy^2 + 2 \frac{d^2u}{dy dz} dy dz + \frac{d^2u}{dz^2} dz^2$$

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3} dx^3 + 3 \frac{d^3u}{dx^2 dy} dx^2 dy + 3 \frac{d^3u}{dx^2 dz} dx^2 dz + 3 \frac{d^3u}{dx dy^2} dx dy^2 + 6 \frac{d^3u}{dx dy dz} dx dy dz + \frac{d^3u}{dy^3} dy^3 + 3 \frac{d^3u}{dx dz^2} dx dz^2 + 3 \frac{d^3u}{dy^2 dz} dy^2 dz + 3 \frac{d^3u}{dy dz^2} dy dz^2 + \frac{d^3u}{dy^3} dz^3$$

Es lässt sich hier die Zahl und Ordnung der auszuführenden Differentiationen nach der Entwicklung des Trinomiums $(dx + dy + dz)^3$ leicht bestimmen. Hätte man das n^{te} Differential darzustellen, so würde die Entwicklung von $(dx + dy + dz)^n$ die Zahl und Ordnung der Differentiationen angeben.

23) Differentiation unentwickelter Functionen dreier veränderlicher Grössen. Wenn drei veränderliche Grössen durch eine Gleichung mit einander verbunden sind, so können nur zwei derselben als unabhängig von einander, oder als ursprünglich veränderlich betrachtet werden; die Veränderungen der dritten hängen von den Veränderungen der beiden andern in einer durch die Natur der Gleichung gegebenen Weise ab. Hält man diese Bemerkung fest, so wird die Entwicklung der Differenzen und der Differentialien der Functionen dreier durch eine Gleichung verbundener Veränderlichen keine Schwierigkeit darbieten, denn man hat nur die bisherigen Regeln der Differentiation in Anwendung zu bringen. Zunächst ist klar, dass wenn $f(x,y,z) = 0$ gegeben ist, dass auch $\Delta f(x,y,z) = 0$ sein werde, denn aus der gegebenen Gleichung folgt, dass z eine Function von x und y ist, und dass man daher setzen kann $z = \varphi(x,y)$, hierdurch erhält man $f[x,y,\varphi(x,y)] = 0$. Diese Gleichung ist für jeden Werth von x und y , also auch für jede

Zunahme von x und y gültig, es muss daher auch $\Delta f[x, y, \varphi(x, y)]$ oder $\Delta f(x, y, z)$ gleich Null sein. Entwickelt man nun die Differenz selbst, so erhält man zunächst

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = 0$$

Man kann diese Differenz auch in folgender Weise ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} & f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) \\ & + f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z + \Delta z) \\ & + f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z) \end{aligned} \right\} = 0$$

Die erste der Horizontalreihen ist die Differenz von $f(x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ in Hinsicht x , die zweite die Differenz von $f(x, y, z + \Delta z)$ in Hinsicht y , und die dritte die Differenz von $f(x, y, z)$ in Hinsicht z , man hat daher:

$$49) \frac{\Delta f(x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\Delta x} \Delta x + \frac{\Delta f(x, y, z + \Delta z)}{\Delta y} \Delta y + \frac{\Delta f(x, y, z)}{\Delta z} \Delta z = 0$$

Da z eine Function von x und y , also $z = \varphi(x, y)$ ist, so hat man nach *No. 39*:

$$\Delta z = \frac{\Delta \varphi(x, y)}{\Delta y} \Delta y + \frac{\Delta \varphi(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \Delta x$$

Führt man diesen Werth in *No. 49* ein, so erhält man:

$$\frac{\Delta f(x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\Delta x} \Delta x + \frac{\Delta f(x, y, z + \Delta z)}{\Delta y} \Delta y + \frac{\Delta f(x, y, z)}{\Delta z} \left(\frac{\Delta \varphi(x, y)}{\Delta y} \Delta y + \frac{\Delta \varphi(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \Delta x \right) = 0$$

Hieraus folgt, wenn man nach Δx und Δy ordnet:

$$\Delta x \left(\frac{\Delta f(x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\Delta x} + \frac{\Delta f(x, y, z)}{\Delta z} \frac{\Delta \varphi(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \right) + \Delta y \left(\frac{\Delta f(x, y, z + \Delta z)}{\Delta y} + \frac{\Delta f(x, y, z)}{\Delta z} \frac{\Delta \varphi(x, y)}{\Delta y} \right) = 0$$

Da Δx und Δy ganz von einander unabhängige Grössen sind, und überhaupt jeden Werth besitzen können, so kann die vorstehende Gleichung nur dann bestehen, wenn die Factoren von Δx und Δy jeder für sich gleich Null sind, d. h. es muss sein

$$\frac{\Delta f(x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\Delta x} + \frac{\Delta f(x, y, z)}{\Delta z} \frac{\Delta \varphi(x, y + \Delta y)}{\Delta x} = 0$$

$$\text{und } \frac{\Delta f(x,y,z+\Delta z)}{\Delta y} + \frac{\Delta f(x,y,z)}{\Delta z} \frac{\Delta \varphi(x,y)}{\Delta y} = 0$$

Geht man zu dem speciellen Fall über, in welchem $\Delta x, \Delta y$ also auch $\Delta z = 0$ werden, so gehen die beiden vorstehenden Gleichungen in folgende über:

$$\begin{aligned} \frac{df(x,y,z)}{dx} + \frac{df(x,y,z)}{dz} \cdot \frac{d\varphi(x,y)}{dx} &= 0 \\ 0 = \frac{df(x,y,z)}{dy} + \frac{df(x,y,z)}{dz} \cdot \frac{d\varphi(x,y)}{dy} &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen erhalten, wenn man berücksichtigt, dass $\varphi(x,y) = z$, folgende Gestalt:

$$50) \begin{cases} \frac{df(x,y,z)}{dx} + \frac{df(x,y,z)}{dz} \frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{df(x,y,z)}{dy} + \frac{df(x,y,z)}{dz} \frac{dz}{dy} = 0 \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$51) \begin{cases} \frac{dz}{dx} = - \frac{\frac{df(x,y,z)}{dx}}{\frac{df(x,y,z)}{dz}} \\ \frac{dz}{dy} = - \frac{\frac{df(x,y,z)}{dy}}{\frac{df(x,y,z)}{dz}} \end{cases}$$

Man erkennt hieraus, dass auch in den Fällen, in welchen aus einer Gleichung $f(x,y,z) = 0$ z nicht gesondert von x und y dargestellt ist, die Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ bestimmt werden können. Wäre etwa die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

gegeben, so würde man nach No. 51 folgende Werthe für $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ erhalten:

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{xc^2}{za^2}, \quad \frac{dz}{dy} = - \frac{yc^2}{zb^2}$$

24) Die Entwicklung der höheren Differentialien folgt ganz nach den schon früher gegebenen Regeln. Man hat nur

zu beachten, dass die partiellen Differentialquotienten $\frac{df(x,y,z)}{dx}$, $\frac{df(x,y,z)}{dy}$, $\frac{df(x,y,z)}{dz}$ Functionen von x , y , z , und die Quotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ Functionen von x und y sind. Setzt man der Kürze halber $f(x,y,z) = u$, so erhalten die Gleichungen No. 50 folgende Form:

$$\alpha) \begin{cases} \frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0 \end{cases}$$

Die wiederholte Differentiation dieser Gleichungen führt zu folgenden Gleichungen:

$$\beta) \begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} + 2 \frac{d^2u}{dx dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d^2u}{dz^2} \cdot \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} = 0 \\ \frac{d^2u}{dy^2} + 2 \frac{d^2u}{dy dz} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{d^2u}{dz^2} \cdot \frac{dz^2}{dy^2} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} = 0 \end{cases}$$

Differentirt man die erste der Gleichungen α in Hinsicht y , die zweite in Hinsicht x , so erhält man in beiden Fällen folgende Gleichung:

$$\gamma) \frac{d^2u}{dx dy} + \frac{d^2u}{dx dz} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{d^2u}{dz dy} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d^2u}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dx dy} = 0$$

Aus der ersten der Gleichungen β lässt sich der Werth von $\frac{d^2z}{dx^2}$, aus der zweiten der Werth von $\frac{d^2z}{dy^2}$ und aus der Gleichung γ lässt sich der Werth von $\frac{d^2z}{dx dy}$ bestimmen. Aus der Gleichung $f(x,y,z) = 0$ folgt, dass z eine Function von x und y ist, das vollständige zweite Differential von z ist daher nach §. 22

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2z}{dx dy} dx dy + \frac{d^2z}{dy^2} dy^2$$

Die partiellen Differentialquotienten dieser Gleichung können nach der eben angegebenen Weise bestimmt werden, somit ist das vollständige zweite Differential von z bestimmt. — Das Dritte erfordert eine wiederholte Differentiation der Gleichungen β in Hinsicht x und y ; man erhält hierdurch die Werthe von $\frac{d^3z}{dx^3}$, $\frac{d^3z}{dx^2 dy}$, ..., durch welche sofort das vollständige dritte Diffe-

rential von z zu bilden ist. — Der bezeichnete Weg ist bei Entwicklung der höheren Differentialien weiter zu befolgen; man kommt dabei zu sehr zusammengesetzten Formeln, die indess in ihrer Bildung ein bestimmtes Gesetz erkennen lassen; doch führen sie bei grosser Weitläufigkeit zu keiner Erweiterung der Wissenschaft, und können daher zur Seite gelassen werden.

25) Unentwickelte Functionen von vier und mehreren veränderlichen Grössen werden ganz in ähnlicher Weise behandelt, wie Functionen von drei Veränderlichen. Man hat in Folge der Gleichung, welche die veränderlichen Grössen enthält, eine der Variabeln als eine Function der übrigen zu betrachten, und hat dann in Hinsicht jeder der ursprünglich veränderlichen Grössen das Differential zu nehmen. Da aber jede dieser Grössen, und ebenso die Differenzen und Differentialien derselben nicht abhängig sind von den andern Veränderlichen, so sind, wenn die ganze Function gleich Null ist, auch die Differentialien in Hinsicht jeder der ursprünglich Veränderlichen gleich Null, so dass man eben so viele Gleichungen erhält, als unabhängig veränderliche Grössen in den unentwickelten Functionen enthalten sind. Wäre z. B. $u = f(x, y, z, t) = 0$ gegeben, so würde man durch Differentiation folgende Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} + \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} &= 0 \\ \frac{du}{dy} + \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} &= 0 \\ \frac{du}{dz} + \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} &= 0\end{aligned}$$

Die höhern Differentialien führen zu weitläufigen Operationen, können aber nach den früheren Regeln ohne Schwierigkeit entwickelt werden.

Dritter Abschnitt.

Änderung der unabhängig veränderlichen Grösse.

26) Wenn eine Gleichung $f(x,y) = 0$ gegeben ist, so kann x oder y als die ursprünglich oder unabhängige Veränderliche betrachtet werden. Es ist gleichgültig, welche dieser Grössen als die unabhängig Veränderliche angenommen wird, hat man aber einmal darüber entschieden, so ist dies bei der ersten wie bei den wiederholten Differentiationen festzuhalten. Es wurde in den früheren Untersuchungen immer x als die unabhängig Veränderliche betrachtet, in diesem Falle ist y eine Function von x , so dass man setzen kann $y = \varphi(x)$. Durch wiederholte Differentiationen erhält man nach der Reihe die Werthe von $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$, welche Werthe, wie früher gezeigt wurde, auch dann gefunden werden können, wenn aus der Gleichung $f(x,y) = 0$ y nicht gesondert dargestellt wird oder werden kann. Wenn nun x selbst eine Function einer andern Veränderlichen z. B. von der Grösse s ist, so fragt es sich, welche Werthe hierdurch die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ erhalten. Man erkennt, dass diese Untersuchung mit einer andern zusammenfällt, in welcher man es sich zur Aufgabe machen würde, eine gegebene Differentialformel, in welcher eine der Veränderlichen, etwa x , als die unabhängig Veränderliche betrachtet wurde, in eine andere zu verwandeln, in welcher eine neu einzuführende Veränderliche als die unabhängige Variable angenommen wird. Zu Fällen dieser Art führt namentlich die Anwendung der Differentialrechnung auf Geometrie, sie sind aber auch rein analytisch betrachtet von Interesse, und später in der Integralrechnung von besonderem Nutzen.

Wenn x eine Function von s und y eine Function von x ist, so ist auch y eine Function von s ; man erhält durch Differentiation nach §. 12.

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}}$$

Differentirt man von Neuem in Hinsicht s , so erhält man, indem man differentirt wie bei Brüchen,

$$\frac{d \frac{dy}{dx}}{ds} = \frac{\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dx^2}{ds^2}}$$

Beachtet man dass:

$$\frac{d \frac{dy}{dx}}{ds} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{ds},$$

so erhält man, wenn man durch $\frac{dx}{ds}$ dividirt,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dx^3}{ds^3}}$$

Man kann hier den gemeinschaftlichen Nenner ds^3 weglassen und setzen

$$52) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}{dx^3}$$

Man muss sich aber hierbei erinnern, dass die Differentialien in Hinsicht der Grösse s genommen sind, dass also weder x noch y unabhängig Veränderliche sind. Würde man x oder y als die unabhängig Variable betrachten, so würde in dem einen Falle d^2x , in dem andern d^2y verschwinden. Setzt man in einer Differentialformel, in welcher x die unabhängig Veränderliche ist, statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ den Werth, welche die Gleichung No. 52 angibt, so erhält man eine Formel, in welcher weder x noch y die ursprünglich Veränderlichen sind, in welcher aber stillschweigend eine dritte Grösse als die unabhängig Veränderliche gedacht ist.

Differentirt man $\frac{d^2y}{dx^2}$ von Neuem in Hinsicht s , so erhält man $\frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{dx}{ds}$, und ebenso hätte man die Differentiation des Bruches, der nach der Gleichung *No. 52* den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ ausdrückt, in Hinsicht s auszuführen. Bemerkt man aber, dass x und y und ebenso deren Differentialien Functionen von s sind, und dass allerwärts die Differentiation in Hinsicht s auszuführen ist, so kann man gleich den gemeinschaftlichen Nenner ds , den man hierdurch erhält, weglassen; es wird dies zu keiner Zweideutigkeit führen, wenn man sich nur erinnert, dass die Differentialien in Hinsicht s genommen sind; man erhält dann durch Differentiation der Gleichung *No. 52*

$$\frac{d^3y}{dx^3} \cdot dx = \frac{dx^2 \cdot d^3y - 3dx d^2x d^2y + 3dy (d^2x)^2 - dx dy d^3x}{dx^4}$$

und hieraus:

$$53) \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dx^2 d^3y - 3dx d^2x d^2y + 3dy (d^2x)^2 - dx dy d^3x}{dx^5}$$

Würde man die Gleichung *No. 53* von Neuem differentiren, so würde man hierdurch den Werth von $\frac{d^4y}{dx^4}$ für den Fall erhalten, in welchem weder x noch y die unabhängig Veränderlichen sind, dagegen beide von einer dritten Variablen abhängen. — Durch Einführung der Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ... in eine Differentialformel, in welcher x die unabhängig Veränderliche ist, wird dieselbe in eine andere verwandelt, in welcher x und y als abhängig Veränderliche auftreten, und in welcher die Differentialien von x und y in Bezug auf jene Grösse genommen sind, welche als unabhängig veränderlich gedacht wird, und von welcher x und y Functionen sind. Setzt man z. B. in der Gleichung

$$r = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

in welcher x die unabhängig Veränderliche ist, für $\frac{d^2y}{dx^2}$ den in *No. 52* erhaltenen Werth, so erhält man:

$$\alpha) \quad r = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx \, d^2y - dy \, d^2x}{dx^3}}$$

in welcher Gleichung nicht mehr x sondern s die ursprünglich Veränderliche ist. Wäre nun im speciellen Falle die Abhängigkeit der Grössen x und y von s der Art, dass $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, so würde man durch weitere Differentiation erhalten:

$$0 = \frac{dx \, d^2x + dy \, d^2y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

Hieraus folgt:

$$d^2x = -\frac{dy \, d^2y}{dx}, \quad d^2y = -\frac{dx \, d^2x}{dy}$$

Führt man diese Werthe in der Gleichung α ein, so erhält man:

$$r = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx^2 d^2y + dy^2 \cdot d^2x}{dx^4}} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{d^2y} \cdot dx$$

und

$$r = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx^2 d^2x + dy^2 d^2x}{dy \, dx^3}} = -\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{d^2x} \cdot dy$$

Die Werthe von r sind hier dieselben wie der oben aufgestellte, nur besteht der Unterschied, dass $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ das Differential der Variabeln ist, die als die unabhängig Veränderliche betrachtet wird, während früher x die unabhängig Veränderliche war.

Wäre, um ein zweites Beispiel anzuführen, $\frac{xd^2y}{dx^2}$ gegeben, und wäre x hierin die unabhängig Veränderliche, so würde man durch Einführung des Werthes von $\frac{d^2y}{d^2x}$ nach der Gleichung No. 52 folgende Formel erhalten:

$$\beta) \quad \frac{x \, dx \, d^2y - x \, dy \, d^2x}{dx^3}$$

welche gleichen Werth wie die gegebene hätte, in welcher aber s die unabhängig Veränderliche wäre. Gesetzt nun, es wäre in

speciellem Falle die Abhängigkeit der Grössen x und y von s der Art, dass $ds = y dx$, so würde man durch Differentiation dieser letzten Gleichung erhalten:

$$0 = dy dx + y d^2x$$

hieraus folgt aber:

$$d^2x = - \frac{dy dx}{y}$$

Führt man diesen Werth in der Formel β ein, so erhält man:

$$\frac{xy d^2y + x dy^2}{y dx^2}$$

in welchem Ausdruck $y dx$ das Differential der unabhängig Veränderlichen ist. Wäre dagegen die Abhängigkeit der Grössen x und y von s der Art, dass $ds = dy$, so würde man durch Differentiation erhalten:

$$0 = d^2y$$

und die Formel β würde in folgende übergehen:

$$- \frac{x dy d^2x}{dx^3}$$

in welcher nur s , oder, was dasselbe in diesem Falle ist, y die unabhängig Veränderliche ist.

Man erkennt, dass nach einem ganz ähnlichen Verfahren beliebige Differentialformeln, in welchen x die unabhängige Veränderliche ist, und in welchen zweite und höhere Differentialien von y enthalten sind, mit Hülfe der Gleichungen No. 52, 53 und solcher die durch wiederholte Differentiationen erhalten würden, in andere Differentialformeln umgeändert werden können, in welchen eine neue veränderliche Grösse als die unabhängig Veränderliche betrachtet wird. Hat man so die allgemeine Formel hergestellt, so kann man nach Belieben über die als unabhängig veränderlich gedachte Grösse verfügen, d. h. man kann willkürlich eine Abhängigkeit der Grössen x und y von der neuen Veränderlichen annehmen; hat man aber durch eine Gleichung eine solche festgesetzt, so wird die wiederholte Differentiation jene Abhängigkeit der Differentialien von x und y näher bezeichnen, die aus der gemachten Annahme hervor-

geht, und die in der allgemeinen Gleichung dann zu berücksichtigen ist.

27) Die Untersuchungen des vorhergehenden § geben die Operationen an, welche auszuführen sind, wenn eine Differentialformel, in welcher x die unabhängig Veränderliche ist, in einer andern verwandelt werden soll, in welcher $\sqrt{dx^2+dy^2}$, ydx u. s. w. die Differentialien der unabhängig Veränderlichen sind. Es wird nun keine Schwierigkeit haben, umgekehrt eine Differentialformel, in welcher $\sqrt{dx^2+dy^2}$, ydx , u. s. w. die Differentialien der unabhängig Veränderlichen sind, in eine andere zu verwandeln, in welcher x oder y oder eine beliebige andere Grösse die unabhängig Veränderliche ist. Gesetzt, es sei $\sqrt{dx^2+dy^2}$ das Differential der unabhängig Veränderlichen, so dass man hat $dt = \sqrt{dx^2+dy^2}$. Betrachtet man nun x , y und t als Functionen einer andern Grösse s , so erhält man:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{dt}{ds}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dt}{ds}}$$

Differentirt man von Neuem, so erhält man:

$$\frac{d \frac{dx}{dt}}{ds} = \frac{\frac{dt}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2t}{ds^2}}{\frac{dt^2}{ds^2}}$$

Es ist aber:

$$\frac{d \frac{dx}{dt}}{ds} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dt}{ds}$$

Führt man diesen Werth ein und dividirt man durch $\frac{dt}{ds}$, so erhält man:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\frac{dt}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2t}{ds^2}}{\frac{dt^3}{ds^3}}$$

Lässt man den gemeinschaftlichen Nenner ds^3 weg, so erhält man:

$$\alpha) \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dt \, d^2x - dx \, d^2t}{dt^3}$$

Ebenso findet man durch Differentiation des Bruches $\frac{dy}{dt}$

$$\beta) \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dt \, d^2y - dy \, d^2t}{dt^3}$$

Da nach der Voraussetzung $dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, so erhält man, indem man t, x, y als Functionen von s betrachtet, durch Differentiation

$$d^2t = \frac{dx \, d^2x + dy \, d^2y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

Führt man diesen Werth und den von dt in den Gleichungen α und β ein, so erhält man:

$$\frac{d^2x}{dx^2 + dy^2} = \frac{dy^2 d^2x - dx \, dy \, d^2y}{(dx^2 + dy^2)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2 + dy^2} = \frac{dx^2 d^2y - dx \, dy \, d^2x}{(dx^2 + dy^2)^2}$$

Durch wiederholte Differentiation würde man die Werthe von

$$\frac{d^3x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{d^3y}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

für jene Fälle erhalten, in welchen nicht mehr $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, sondern ds das Differential der unabhängig Veränderlichen wäre.

Wäre etwa die Differentialformel $\frac{dx \sqrt{dx^2 + dy^2}}{d^2y}$ gegeben, in welcher $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ das Differential der unabhängig Veränderlichen sein soll, und sollte man dieselbe in eine andere umwandeln, in welcher x und y und $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ als Functionen einer neuen als unabhängig betrachteten Variabeln auftreten, so hat man zunächst die gegebene Formel so zu ordnen, dass man unmittelbar erkennt, dass in ihr $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ das Differential der unabhängig Veränderlichen ist. Man gelangt hierzu, wenn man Zähler und Nenner durch $dx^2 + dy^2$ dividirt; man erhält hierdurch

$$\frac{dx \sqrt{dx^2 + dy^2}}{d^2y} = \frac{\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}}{\frac{d^2y}{dx^2 + dy^2}}$$

Führt man hierin den oben für $\frac{d^2y}{dx^2+dy^2}$ gefundenen Werth ein, so erhält man:

$$\frac{dx(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^2 d^2y - dx dy d^2x}.$$

In dieser Formel ist s die Grösse, die als unabhängig Veränderliche angenommen wurde, und x und y sind Functionen derselben. Ueber die Form dieser Functionen kann aber ganz nach Willkür verfügt werden. Würde man in einem speciellen Fall setzen $s=x$, so würde man erhalten $ds=dx$, und $d^2s=0=d^2x$, d. h. wenn man x gleich der unabhängig Veränderlichen setzt, so ist $d^2x=0$. Hierdurch geht die oben erhaltene allgemeine Formel in folgende über:

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y}$$

in welcher aber x und nicht mehr wie früher $\sqrt{dx^2+dy^2}$ die unabhängig Veränderliche ist.

Es werden die bisherigen Untersuchungen genügen, um zu zeigen, wie zu verfahren ist, wenn eine Differentialformel, in welcher eine der Veränderlichen als die unabhängig Variable betrachtet wurde, in eine andere verwandelt wird, in welcher eine andere Variable für die unabhängig Veränderliche genommen wird.

Vierter Abschnitt.

Taylor's Reihe für Functionen einer und mehrerer veränderlichen Grössen.

28) Die Anwendungen, welche von den bisher entwickelten Lehren in der Geometrie und Mechanik gemacht werden können, sind sehr mannichfaltig, sie sind zugleich sehr allgemein, weil der Algorithmus des Differentirens über alle Functionen, welche die Mathematik kennt, sich erstreckt. Es können überdies jene Lehren zu mehreren wichtigen analytischen Unter-

suchungen benützt werden, von welchen hier zunächst jene, welche zur Reihenentwicklung der Functionen führt, hervorgehoben werden sollen.

Es wurde in der Einleitung gezeigt, dass eine jede Function einer veränderlichen Grösse in eine Reihe, geordnet nach den Potenzen der Veränderlichen, entwickelt werden könne. — Setzt man in einer beliebigen Function $f(x)$ $x+h$ für x , so erkennt man leicht, dass $f(x+h)$ sich in eine Reihe und zwar geordnet nach den Potenzen von $x+h$ entwickeln lasse. Entwickelt man weiter in dieser Reihe die Potenzen des Binomiums $x+h$, und ordnet man nach den Potenzen von h , so ergibt sich, dass $f(x+h)$ sich durch eine Reihe, nach den Potenzen von h geordnet, darstellen lasse, d. h. man kann behaupten, dass allgemein

$$f(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \dots$$

ist, wo die Vorzahlen $A, B, C, D, \dots$ irgend welche Functionen von x sind, deren Beschaffenheit nur von der gegebenen Function $f(x)$ abhängt, und welche die Grösse h nicht enthalten. Die Aufgabe besteht nun darin: die Werthe von $A, B, C, D, \dots$ zu bestimmen. — Für's erste ist klar, dass jedenfalls $A=f(x)$ sein werde, denn setzt man $h=0$, so erhält man $f(x)=A$. Bevor die Werthe von $B, C, D, \dots$ entwickelt werden, ist es nöthig, darauf aufmerksam zu machen, dass es gleichgültig ist, ob man bei der Differentiation von $f(x+h)$ x oder h als die Veränderliche betrachte, d. h. dass man zu gleichem Resultate gelange, wenn man $f(x+h)$ in Hinsicht x , wie wenn man $f(x+h)$ in Hinsicht h differentirt; man erhält nämlich im ersten Falle

$$df(x+h) = \frac{df(x+h)}{d(x+h)} \cdot dx = \varphi(x+h)dx, \text{ daher:}$$

$$\frac{df(x+h)}{dx} = \varphi(x+h)$$

$$\text{und im zweiten Falle erhält man } df(x+h) = \frac{df(x+h)}{d(x+h)} \cdot$$

$$dh = \varphi(x+h) \cdot dh, \text{ daher:}$$

$$\frac{df(x+h)}{dh} = \varphi(x+h)$$

es ist daher:

$$\frac{df(x+h)}{dx} = \frac{df(x+h)}{dh}$$

In gleicher Weise erhält man:

$$\frac{d^2f(x+h)}{dx^2} = \frac{d^2f(x+h)}{dh^2}$$

und allgemein

$$54) \frac{d^n f(x+h)}{dx^n} = \frac{d^n f(x+h)}{dh^n}$$

Differentirt man die oben aufgestellte Reihe für $f(x+h)$ in Hinsicht x und in Hinsicht h , so erhält man:

$$\frac{df(x+h)}{dx} = \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx} \cdot h + \frac{dC}{dx} \cdot h^2 + \dots$$

$$\frac{df(x+h)}{dh} = B + 2Ch + 3Dh^2 + \dots$$

Da aber $\frac{df(x+h)}{dx} = \frac{df(x+h)}{dh}$ ist, so erhält man:

$$B + 2Ch + 3Dh^2 + \dots = \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx} h + \frac{dC}{dx} \cdot h^2 + \dots$$

Hieraus findet man, indem man die Vorzahlen gleicher Potenzen von h einander gleich setzt:

$$B = \frac{dA}{dx}, \quad 2C = \frac{dB}{dx}, \quad 3D = \frac{dC}{dx}, \dots$$

Es wurde oben gezeigt, dass $A = f(x)$; führt man diesen Werth in der Gleichung für B ein, und setzt man den Werth, den man hierdurch für B erhält, in die Gleichung für C u. s. w., so findet man:

$$B = \frac{df(x)}{dx}, \quad C = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \quad D = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3f(x)}{dx^3}, \dots$$

Hierdurch wird:

$$55) f(x+h) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} \cdot h + \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

Diese Reihe wird nach ihrem Erfinder die Taylorsche Reihe genannt. Es kann dieselbe leicht auf Functionen zweier und mehrerer veränderlichen Grössen ausgedehnt werden, es soll aber hier zuvor ein specieller Fall derselben, der von Maclaurin gefunden wurde, näher bezeichnet werden. Setzt

man $x = 0$, und $h = x$, so erhält man die von Maclaurin aufgestellte Reihe, nämlich:

$$56) f(x) = \left(f(x)\right)_0 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{1.2} + \dots$$

Die unten an den Klammern angehängten Nullen bedeuten, dass in $f(x)$ und in den Differentialquotienten von $f(x)$ für x Null zu setzen ist. Aus der Taylor'schen Reihe kann auch leicht eine andere Reihe abgeleitet werden, von welcher die Maclaurin'sche nur ein specieller Fall ist, und die eben desshalb die allgemeinere Maclaurin'sche Reihe genannt wird. Man erhält dieselbe, wenn man in *No. 55* $x=a$ und $h=x-a$ setzt, hierdurch wird

$$57) f(x) = \left(f(x)\right)_a + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_a (x-a) + \left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)_a \frac{(x-a)^2}{1.2} + \dots$$

29) Es ist einleuchtend, dass die Taylor'sche Reihe zur Erfindung unzählig vieler Reihen benutzt werden kann; man hat hiezu nur für $f(x+h)$ eine beliebige Function zu setzen und die in *No. 55* vorgeschriebenen Operationen auszuführen. Wäre z. B. $f(x+h) = (x+h)^n$, so hat man $f(x) = x^n$, $\frac{df(x)}{dx} = nx^{n-1}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$, ... man erhält daher nach der Formel *No. 55*

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}h^2 + \dots$$

welches die bekannte Newton'sche Binomialformel ist.

Wäre, um ein anderes Beispiel anzuführen, $f(x+h) = \sin. (x+h)$, so hat man $f(x) = \sin. x$, $\frac{dfx}{dx} = \cos. x$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\sin. x$, $\frac{d^3f(x)}{dx^3} = -\cos. x$, ... es ist daher:

$$\sin. (x+h) = \sin. x + \cos. x \cdot h - \sin. x \cdot \frac{h^2}{1.2} - \cos. x \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

Setzt man hierin $x = 0$, und $h = z$, so erhält man:

$$\sin. z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

welches die, in der Einleitung gegebene, von Vieta entdeckte Reihe ist.

Wäre in einem anderen Falle $f(x+h) = \lg. \sin. (x+h)$, so hat man $f(x) = \lg. \sin. x$,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{\cos. x}{\sin. x}, \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\sin. x^2}, \quad \frac{d^3f(x)}{dx^3} = 2 \frac{\cos. x}{\sin. x^3}, \quad \frac{d^4f(x)}{dx^4} = -2 \frac{1+2 \cos. x^2}{\sin. x^4}, \dots$$

man erhält, wenn man diese Werthe in No. 55 einführt:

$$\lg. \sin. (x+h) = \lg. \sin. (x) + \frac{\cos. x}{\sin. x} \cdot h - \frac{1}{\sin. x^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + 2 \cdot \frac{\cos. x}{\sin. x^3} \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 2 \frac{(1+2 \cos. x^2)}{\sin. x^4} \cdot \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Wäre endlich $f(x+h) = \text{Arc.} (\sin. = x+h)$, so hat man $f(x) = \text{Arc.} (\sin. = x)$,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}, \quad \frac{d^3f(x)}{dx^3} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}, \dots$$

Führt man diese Werthe in No. 55 ein, so erhält man:

$$\text{Arc.} (\sin. = x+h) = \text{Arc.} (\sin. = x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot h + \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{1+2x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}} \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Es genügen diese Beispiele, um zu zeigen, dass mannichfaltige Reihen auf diesem Wege gefunden werden können; auch ist klar, dass eben diese Reihen, abgesehen von der Wichtigkeit, welche dieselben in rein analytischen Untersuchungen besitzen, auch zur Bestimmung der numerischen Werthe der Logarithmen, der Sinusse, Cosinusse u. s. w. mit vielem Nutzen gebraucht werden können, nur ist dann vorzugsweise auf die Convergenz der Reihen zu achten, die durch passend gewählte Substitutionen für x und h und durch Verbindung verschiedener Reihen nicht selten erhöht werden kann.

30) Die Herleitung der Taylor'schen Reihe ist in § 28 auf die Annahme gestützt, dass eine jede Function $f(x+h)$ sich in eine Reihe von der Form $f(x) + Bh + Ch^2 + \dots$ entwickeln lasse, in welcher h nur mit ganzen und nicht mit gebrochenen oder mit negativen Exponenten auftritt. Dass dies sich wirklich so bei allen in der Einleitung betrachteten Functionen verhalte, ist

an sich klar; man kann indess, wie Lagrange gezeigt hat, auch a priori beweisen, dass in der nach den Potenzen von h geordneten Reihe, welche den Werth von $f(x+h)$ darstellt, nur ganze und positive Exponenten von h enthalten sein können; wobei jedoch vorausgesetzt wird, dass x eine unbestimmte Grösse ist. Für specielle Werthe von x kann es eintreten, dass h mit einem gebrochenen Exponenten erscheint; in solchen Fällen ist die Voraussetzung, die bei Herleitung der Taylor'schen Reihe gemacht wurde, nicht zulässig, daher auch die Reihe selbst für jene Fälle nicht anwendbar.

Es soll zuerst gezeigt werden, dass, wenn $f(x+h)$ in eine Reihe fortlaufend nach den Potenzen von h entwickelt wird, h nicht mit einem gebrochenen Exponenten vorkommen könne. — Wenn x in $f(x)$ nicht mit einem Wurzelexponenten enthalten ist, so wird, wenn man $x+h$ für x setzt, auch $x+h$, daher auch h nicht mit einem Wurzelexponenten auftreten; die Entwicklung von $f(x+h)$ kann daher in diesem Falle keine Wurzelexponenten von h enthalten. Ist aber $f(x)$ eine irrationale Function von x , so wird, wenn man $x+h$ für x setzt, in der nicht entwickelten Function auch h unter einem Wurzelzeichen vorkommen; es ist demnach zu zeigen, dass auch in diesem Falle in der entwickelten Function h nur mit ganzen Exponenten auftreten könne. Aus der Theorie der Gleichungen ist bekannt, dass jede Wurzel eben so viele verschiedene Werthe hat, als der Wurzelexponent Einheiten enthält, so gibt es für $\sqrt{x}$ zwei, für $\sqrt[3]{x}$ drei Werthe u. s. w. Die Zahl dieser Werthe wird nicht abgeändert, wenn man $x+h$ statt x setzt, d. h. es gibt für $\sqrt{x+h}$ zwei, für $\sqrt[3]{x+h}$ drei Werthe u. s. w. Wenn daher x in $f(x)$ mit einem beliebigen Wurzelexponenten enthalten ist, so ist die Anzahl der Werthe, welche $f(x)$ zukömmt, dieselbe, wie jene, welche $f(x+h)$ zukömmt. Entwickelt man nun $f(x+h)$, so kann hierdurch die Anzahl der Werthe von $f(x+h)$ nicht zu- und nicht abnehmen, dies ist aber nur dann der Fall, wenn in der entwickelten Function h nicht mit einem

gebrochenen Exponenten enthalten ist. Gesetzt nämlich, es wäre in der entwickelten Function ein gebrochener Exponent von h etwa in der Form $h^{\frac{n}{m}}$ enthalten, so hätte man:

$$f(x+h) = f(x) + Bh + Ch^2 + \dots + Mh^{\frac{n}{m}} + \dots$$

es hat aber $h^{\frac{n}{m}}$ nach der Theorie der Gleichungen m verschiedene Werthe; jeder derselben kann mit jedem der Werthe der irrationalen Function $f(x)$ verbunden werden. Wären es etwa p Werthe, welche $f(x)$ zukommen, so würde die entwickelte Function $f(x+h)$ im Ganzen $m \cdot p$ verschiedene Werthe darbieten können, während der nicht entwickelten nur p Werthe zukommen, was absurd ist.

Die in eine Reihe nach den Potenzen von h entwickelte Function $f(x+h)$ kann auch keine negative Exponenten von h enthalten, denn würden solche vorkommen, so würde die entwickelte Function für den Fall $h=0$ unendlich werden, während die nicht entwickelte Function $= f(x)$ würde, was absurd ist.

Für specielle Werthe von x kann es eintreten, dass h in der entwickelten Function mit gebrochenen oder mit negativen Exponenten erscheint, in diesem Falle ist die Taylor'sche Reihe, wie schon oben erwähnt wurde, nicht anwendbar. Wäre z. B. $\sqrt[3]{x-a}$ die gegebene Function, so hätte man $f(x+h) = \sqrt[3]{(x+h-a)}$, welche, so lange x unbestimmt bleibt, nach der Taylor'schen Reihe entwickelt werden kann, und keine gebrochene oder negative Exponenten von h enthält; setzt man aber $x=a$, so erhält man $f(a+h) = \sqrt[3]{a+h-a} = \sqrt[3]{h}$, es ist daher für diesen speciellen Werth von x Taylor's Reihe nicht anwendbar. Dies zeigt sich ebenso, wenn man zuerst für einen unbestimmten Werth von x die Reihenentwicklung ausführt und darauf den speciellen Werth von x setzt, man erhält nämlich nach No. 55

$$\sqrt[3]{(x+h-a)} = \sqrt[3]{x-a} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x-a)^2}} \cdot h - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x-a)^5}} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

Setzt man $x=a$, so verschwindet das erste Glied dieser Reihe und alle andern werden gleich ∞ mit wechselnden Zeichen,

so dass der Werth der Reihe für den angenommenen speciellen Fall sich auf diesem Wege nicht angeben lässt.

Wäre in einem anderen Falle $\frac{1}{(x-a)^2}$ die gegebene Function, so kann, so lange x unbestimmt bleibt, $\frac{1}{(x+h-a)^2}$ nach No. 55 in eine Reihe fortlaufend nach den Potenzen von h entwickelt werden, geht man aber zu dem speciellen Fall über, in welchem $x=a$, so wird $\frac{1}{(x+h-a)^2} = \frac{1}{h^2}$; h tritt also hier mit einem negativen Exponenten auf, es ist daher für diesen speciellen Werth von x die Taylor'sche Reihe nicht anwendbar. — Ueberhaupt erkennt man, dass, wenn in der gegebenen Function die unbestimmte Grösse x unter einem Wurzelzeichen oder mit einem negativen Exponenten enthalten ist, und wenn es Werthe für x gibt, durch welche jene unter Wurzelzeichen enthaltenen oder mit negativen Exponenten versehenen Grössen verschwinden, ohne dass für eben jene Werthe von x auch h verschwinde, nachdem man $x+h$ für x gesetzt hat, dass dies Fälle sind, in welchen h mit gebrochenen oder negativen Exponenten auftritt, auf welche daher die Taylor'sche Reihe nicht anwendbar ist.

31) Es ist von Interesse, zu untersuchen, in wiefern die Werthe, welche die einzelnen Glieder der Taylor'schen Reihe dadurch erhalten, dass man der veränderlichen x einen bestimmten Werth beilegt, ein Mittel abgeben, um zu erkennen, ob in der entwickelten Function $f(x+h)$ für eben jene Werthe von x die Grösse h mit negativen oder mit gebrochenen Exponenten enthalten ist. — Es ist:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} \cdot h + \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

Setzt man hierin $x=a$, so erhält man:

$$f(a+h) = f(a) + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_a \cdot h + \left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)_a \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

Gesetzt, es wäre a ein solcher Werth, für welchen h mit gebrochenen Exponenten erscheinen würde; so müsste im Allgemeinen sein:

$f(a+h) = Ah^{-\alpha} + Bh^{-\beta} + \dots + M + Nh + Ph^2 + \dots$
 Setzt man $h=0$, so erhält man: $f(a) = \infty$, d. h. für eben jenen Werth von x für welchen die Entwicklung von $f(x+h)$ negative Exponenten von h enthält, wird $f(a)$ gleich ∞ . Wenn also das erste Glied der Taylor'schen Reihe für einen bestimmten Werth von x , etwa für $x=a$, unendlich wird, so wird für eben diesen Werth die directe Entwicklung von $f(a+h)$ negative Exponenten von h enthalten, und es findet in diesem speciellen Fall die Taylor'sche Reihe keine Anwendung.

Nimmt man zweitens an, es sei a ein solcher Werth von x , durch welchen die Entwicklung von $f(x+h)$ zu gebrochenen Exponenten von h führt, und zwar sei die Form des Exponenten $\frac{n}{m}$, und $\frac{n}{m} < 1$, so hat man im Allgemeinen

$$\alpha) f(a+h) = A + Bh^{\frac{n}{m}} + Ch + Dh^2 + \dots$$

Differentirt man wiederholt in Hinsicht h , so erhält man:

$$\frac{df(a+h)}{dh} = B \frac{n}{m} h^{\frac{n}{m}-1} + C + 2Dh + \dots$$

$$\frac{d^2f(a+h)}{dh^2} = B \frac{n}{m} \left(\frac{n}{m} - 1 \right) h^{\frac{n}{m}-2} + 2D + \dots$$

Es ist aber:

$$\frac{df(a+h)}{dh} = \frac{df(a+h)}{da}, \quad \frac{d^2f(a+h)}{dh^2} = \frac{d^2f(a+h)}{da^2}, \dots$$

daher:

$$\beta) \frac{df(a+h)}{da} = B \frac{n}{m} h^{\frac{n}{m}-1} + C + 2Dh + \dots$$

$$\gamma) \frac{d^2f(a+h)}{da^2} = B \frac{n}{m} \left(\frac{n}{m} - 1 \right) h^{\frac{n}{m}-2} + 2D + \dots$$

Setzt man in den Gleichungen $\alpha, \beta, \gamma..$ die Zunahme $h=0$, so erhält man, da $\frac{n}{m}-1, \frac{n}{m}-2$, u. s. w. negative Grössen sind, folgende Gleichungen:

$$f(a) = A, \quad \frac{df(a)}{da} = \infty, \quad \frac{d^2f(a)}{da^2} = \infty, \dots$$

Wenn daher in der Taylor'schen Reihe dadurch, dass man $x=a$ setzt, nicht $f(x)$, dagegen $\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \dots$ gleich ∞ werden, so

ist dies ein Beweis, dass für eben diesen Werth von x die Entwicklung von $f(x+h)$ zu gebrochenen Exponenten von h führt, und dass der kleinste Exponent $\frac{n}{m}$ kleiner als die Einheit ist.

Gesetzt endlich, es führe die directe Entwicklung von $f(x+h)$, in dem Falle, in welchem $x=a$ ist, zu einem gebrochenen Exponenten von der Form $\frac{p}{q}$, und zwar falle der Werth von $\frac{p}{q}$ zwischen n und $n+1$, so ist die Form der Reihe, die man erhält, im Allgemeinen folgende:

$$\alpha_1) f(a+h) = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \dots + A_n h^n + P h^{\frac{p}{q}} + A_{n+1} h^{n+1} + \dots$$

Durch successive Differentiation in Hinsicht h erhält man:

$$\frac{df(a+h)}{dh} = A_1 + 2A_2 h + \dots + nA_n h^{n-1} + \frac{p}{q} P h^{\frac{p}{q}-1} + (n+1) A_{n+1} h^n + \dots$$

$$\frac{d^2 f(a+h)}{dh^2} = 2A_2 + \dots + n(n-1) A_n h^{n-2} + \frac{p}{q} \left(\frac{p}{q} - 1 \right) P h^{\frac{p}{q}-2} + (n+1) n A_{n+1} h^{n-1} + \dots$$

Da $\frac{df(a+h)}{dh} = \frac{df(a+h)}{da}$, $\frac{d^2 f(a+h)}{dh^2} = \frac{d^2 f(a+h)}{da^2}$, ..., so hat man auch:

$$\beta_1) \frac{df(a+h)}{da} = A_1 + 2A_2 h + \dots + nA_n h^{n-1} + \frac{p}{q} P h^{\frac{p}{q}-1} + (n+1) A_{n+1} h^n + \dots$$

$$\gamma_1) \frac{d^2 f(a+h)}{da^2} = 2A_2 + \dots + n(n-1) A_n h^{n-2} + \frac{p}{q} \left(\frac{p}{q} - 1 \right) P h^{\frac{p}{q}-2} + (n+1) n A_{n+1} h^{n-1} + \dots$$

Setzt man in den Gleichungen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$ die Zunahme $h=0$, so erhält man:

$$f(a) = A_0, \frac{df(a)}{da} = A_1, \frac{d^2 f(a)}{da^2} = 2A_2, \dots$$

Da eine jede Differentiation der Gleichung α_1 jeden Exponenten von h um eine Einheit vermindert, so wird durch eine n malige Differentiation jeder Exponent um n vermindert und man erhält $\frac{d^n f(a+h)}{dh^n}$ oder

$$\frac{d^n f(a+h)}{da^n} = B_0 + B_1 h^{\frac{p}{q}-n} + B_2 h^1 + B_3 h^2 + \dots$$

Differentirt man von Neuem, so erhält man:

$$\frac{d^{n+1}f(a+h)}{da^{n+1}} = \left(\frac{p}{q} - n\right) B_1 h^{\frac{p}{q} - (n+1)} + B_2 + 2B_3 + \dots$$

$B_0, B_1, B_2, \dots$ bezeichnen hier die Coefficienten, zu welchen eine n malige Differentiation führt. Setzt man in den eben erhaltenen Gleichungen $h=0$, so erhält man:

$$\frac{d^n f(a)}{da^n} = B_0, \quad \frac{d^{n+1} f(a)}{da^{n+1}} = \infty$$

denn es ist $\frac{p}{q} - n$ eine positive Grösse, indem nach der Voraussetzung $\frac{p}{q} > n$ ist; $\frac{p}{q} - (n+1)$ ist aber negativ, weil $\frac{p}{q} < n+1$. — Es geht aus dieser Untersuchung hervor, dass wenn in der Taylor'schen Reihe durch einen speciellen Werth von x , etwa durch $x=a$, das $n+1$ Differential $= \infty$ wird, dass in diesem Falle die directe Entwicklung von $f(a+h)$ nach steigenden Potenzen von h zu einem Exponenten führt von der Form $\frac{p}{q}$, wo $\frac{p}{q} > n$ und $< n+1$ ist.

Einige Beispiele werden den Gebrauch der aufgestellten Regeln näher erläutern. — Es sei die gegebene Function $n = ax^3 + \frac{b}{\sqrt{x}}$. Nach Taylor's Reihe erhält man:

$$a(x+h)^3 + \frac{b}{\sqrt{x+h}} = \left(ax^3 + \frac{b}{\sqrt{x}}\right) + \left(3ax^2 - \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{x^3}}\right)h + \left(6ax + \frac{3}{4} \frac{b}{\sqrt{x^5}}\right)\frac{h^2}{1.2} + \dots$$

Setzt man hierin $x=0$, so wird das erste Glied der Reihe unendlich, es wird daher die directe Entwicklung von $a(x+h)^3 + \frac{b}{\sqrt{x+h}}$ für $x=0$ zu negativen Exponenten führen. In der That erhält man $ah^3 + bh^{-\frac{1}{2}}$.

Für ein zweites Beispiel sei die gegebene Function

$$u = \sqrt{(x-a)^2} + x^5.$$

Man erhält nach Taylor's Problem:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+h-a)^7} + (x+h)^5 &= [\sqrt{(x-a)^7} + x^5] + [\frac{7}{2}(x-a)^{\frac{5}{2}} + 5x^4]h \\ &+ [\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2}(x-a)^{\frac{3}{2}} + 20x^3] \frac{h^2}{1.2} + [\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}(x-a)^{\frac{1}{2}} + 60x^2] \frac{h^3}{1.2.3} \\ &+ [\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}} + 120x] \frac{h^4}{1.2.3.4} + \dots \end{aligned}$$

Setzt man hierin $x=a$, so wird das fünfte Glied oder das vierte Differential unendlich, es wird daher die directe Entwicklung von $\sqrt{(x+h-a)^7} + (x+h)^5$ für den Fall $x=a$ zu einem gebrochenen Exponenten von h führen, der zwischen 3 und 4 liegt. In der That erhält man:

$$h^{\frac{7}{2}} + a^5 + 5a^4h + 10a^3h^2 + 10a^2h^3 + 5ah^4 + h^5.$$

32) Es war bisher nur von Functionen einer veränderlichen Grösse und deren Entwicklung in eine Reihe die Rede, es hält indess nicht schwer, die Taylor'sche Reihe auf Functionen zweier und mehrerer veränderlichen Grössen auszudehnen. Es wird dies hier nur für Functionen zweier veränderlichen Grössen vollständig ausgeführt werden, indem dies genügt, um den Weg zu bezeichnen, der einzuschlagen ist, um die Taylor'sche Reihe überhaupt auf Functionen mehrerer veränderlichen Grössen auszudehnen. — Es sei $f(x,y)$ eine Function zweier von einander unabhängiger Variablen. Lässt man x um h , und y um k zunehmen, so erhält man $f(x+h, y+k)$, betrachtet man hierin zunächst nur x als veränderlich, so erhält man nach *No. 55*

$$a) f(x+h, y+k) = f(x, y+k) + \frac{df(x, y+k)}{dx} \cdot h + \frac{d^2f(x, y+k)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \dots$$

Betrachtet man in $f(x, y+k)$ nur y als die Veränderliche, so hat man ebenfalls nach *No. 55*

$$f(x, y+k) = f(x, y) + \frac{df(x, y)}{dy} \cdot k + \frac{d^2f(x, y)}{dy^2} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \dots$$

Differentirt man diese Gleichung wiederholt in Hinsicht x , so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{df(x, y+k)}{dx} &= \frac{df(x, y)}{dx} + \frac{d^2f(x, y)}{dx dy} \cdot k + \frac{d^3f(x, y)}{dx dy^2} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \dots \\ \frac{d^2f(x, y+k)}{dx^2} &= \frac{d^2f(x, y)}{dx^2} + \frac{d^3f(x, y)}{dx^2 dy} \cdot k + \frac{d^4f(x, y)}{dx^2 dy^2} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \dots \end{aligned}$$

Führt man die Werthe von

$$f(x, y+k), \frac{df(x, y+k)}{dx}, \frac{d^2f(x, y+k)}{dx^2}, \dots$$

in der Gleichung α ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} 58) f(x+h, y+k) = f(x, y) &+ \frac{df(x, y)}{dy} k + \frac{d^2f(x, y)}{dy^2} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \dots \\ &+ \frac{df(x, y)}{dx} h + \frac{d^2f(x, y)}{dx dy} \cdot h \cdot k + \dots \\ &+ \frac{d^2f(x, y)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Das Gesetz, nach welchem die Reihe fortgeht, ist schon aus den wenigen hier entwickelten Gliedern ersichtlich. — Befolgt man einen ganz ähnlichen Weg, so erhält man für $f(x+h, y+k, z+l)$ folgende Reihe:

$$\begin{aligned} 59) f(x+h, y+k, z+l) = u &+ \frac{du}{dx} \cdot h + \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \dots \\ &+ \frac{du}{dy} \cdot k + \frac{d^2u}{dx dy} \cdot h k + \dots \\ &+ \frac{du}{dz} \cdot l + \frac{d^2u}{dx dz} \cdot h l + \dots \\ &+ \frac{d^2u}{dy^2} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \dots \\ &+ \frac{d^2u}{dy dz} \cdot k l + \dots \\ &+ \frac{d^2u}{dz^2} \cdot \frac{l^2}{1.2} + \dots \end{aligned}$$

wo der Kürze halber $f(x, y, z)$ durch u bezeichnet ist.

Fünfter Abschnitt.

Von den grössten und kleinsten Werthen der Functionen.

33) Grösste und kleinste Werthe der Functionen einer veränderlichen Grösse. Wenn eine Function einer Veränderlichen, indem man der Veränderlichen einen bestimmten Werth gibt, etwa $x=a$ setzt, einen Werth erhält, der grösser ist, als wenn man benachbarte Werthe von a , d. h. solche Werthe für x gesetzt hätte, welche nur um Weniges grösser oder kleiner als a sind, so sagt man, für $x=a$ werde die Function ein Maximum. Wenn dagegen, $x=a$ gesetzt, der Werth der Function kleiner wird, als wenn man benachbarte Werthe von a für x setzen würde, so ist für $x=a$ der Werth der Function ein Minimum. So z. B. wird der Werth der Function $12+27x-x^3$ für $x=3$ ein Maximum und für $x=-3$ ein Minimum.

Wenn der Werth einer Function stets zu oder stets abnimmt, indem die Veränderliche stets zu oder abnimmt, so gibt es keinen Werth der Veränderlichen, durch welchen die Function ein Maximum oder Minimum wird. Denn wie gross oder wie klein der Werth der Veränderlichen genommen wird, so kann doch immer ein grösserer oder kleinerer Werth derselben gedacht werden, für welchen daher auch der Werth der Function entsprechend grösser oder kleiner würde. So gibt es z. B. keinen Werth von x , durch welchen die Function x^3+5x+4 ein Maximum oder Minimum wird.

Wenn für einen bestimmten Werth der Veränderlichen, etwa $x=m$ gesetzt, der Werth einer Function reell ist, und wenn durch die benachbarten Werthe, d. h. $x=m+h$, und $x=m-h$, der Werth der Function in dem einen Falle reell und in dem andern imaginär wird, so wird der Werth der Function für $x=m$ ein Grenzwert genannt. So z. B. wird die Function $\sqrt{2ax-x^2}$ gleich Null, wenn man $x=0$ setzt, und es ist 0 ein

Grenzwert der Function, denn nimmt man für x einen Werth kleiner als Null, so wird $\sqrt{2ax - x^2}$ imaginär, nimmt man dagegen für x einen benachbarten Werth, der grösser als Null ist, so wird $\sqrt{2ax - x^2}$ reell. Setzt man $x = 2a$, so wird $\sqrt{2ax - x^2}$ gleich Null; auch hier erkennt man, dass dies ein Grenzwert ist, denn die benachbarten Werthe von $x = 2a$ machen die Function, wenn sie grösser als $2a$ sind, imaginär, und wenn sie kleiner sind, reell.

Es soll nun näher untersucht werden, auf welche Weise methodisch jene Werthe einer Veränderlichen gefunden werden können, durch welche eine Function derselben Veränderlichen ein Maximum oder Minimum wird. — Gesetzt, es sei x der Werth der Veränderlichen, durch welchen $f(x)$ ein Maximum wird, so muss $f(x)$ grösser als $f(x+h)$ und als $f(x-h)$ sein, oder es müssen die Unterschiede

$$f(x+h) - f(x) \text{ und } f(x-h) - f(x)$$

negative Grössen sein. Entwickelt man $f(x+h)$ und $f(x-h)$ nach dem Taylor'schen Lehrsatz in Reihen, so erhält man:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{df(x)}{dx} h + \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \dots$$

$$f(x-h) - f(x) = -\frac{df(x)}{dx} h + \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} - \dots$$

Die Grösse h kann hier so klein angenommen werden, als man nur immer will, daher auch jedenfalls von so geringer Grösse, dass h^2 und alle höhere Potenzen von h gegen h verschwindend klein werden; man erhält dann:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{df(x)}{dx} \cdot h$$

$$f(x-h) - f(x) = -\frac{df(x)}{dx} \cdot h$$

Diese beiden Unterschiede haben also, so lange $\frac{df(x)}{dx}$ einen reellen Werth besitzt, jedenfalls entgegengesetzte Zeichen, denn das Vorzeichen derselben hängt von dem Zeichen von h ab, welches in dem ersten Unterschiede positiv, in dem zweiten

negativ ist. Wenn daher $f(x)$ durch einen Werth von x ein Maximum soll werden können, so muss dies ein solcher Werth sein, durch welchen jedenfalls $\frac{df(x)}{dx}$ gleich Null wird. Es folgt hieraus, dass die Werthe von x , welche man aus der Gleichung $\frac{df(x)}{dx} = 0$ erhält, vielleicht zu einem Maximum führen können. Es wird dies wirklich der Fall sein, wenn dieselben Werthe von x für die Unterschiede

$$f(x+h) - f(x) \text{ und } f(x-h) - f(x)$$

negative Werthe geben. Dies lässt sich aber leicht bestimmen, denn wenn $\frac{df(x)}{dx}$ durch bestimmte Werthe von x Null geworden ist, so hat man:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3f(x)}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

$$f(x-h) - f(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3f(x)}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

und wenn man berücksichtigt, dass $h^3, h^4, \dots$ gegen h^2 verschwinden, so erhält man:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2}$$

$$f(x-h) - f(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2}$$

Das Vorzeichen dieser Unterschiede hängt also nur von dem Vorzeichen von $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ ab und nicht von dem Vorzeichen von h , welches jedenfalls positiv ist, da der Exponent von h eine gerade Zahl ist. Ein Maximum wird also $f(x)$ durch jene Werthe von x werden, durch welche $\frac{df(x)}{dx}$ Null und zugleich $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ negativ wird.

Sollte durch eben die Werthe von x , durch welche $\frac{df(x)}{dx}$ Null wird, auch $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ Null werden, so hat man:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

$$f(x-h) - f(x) = -\frac{d^3f(x)}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

hier hängen die Vorzeichen der Unterschiede von dem Vorzeichen von h ab, es kann daher $f(x)$ nur durch solche Werthe von x ein Maximum werden, durch welche

$$\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \frac{d^3f(x)}{dx^3}$$

zugleich verschwinden; das Vorzeichen von $\frac{d^4f(x)}{dx^4}$, worin man für x eben jenen Werth zu setzen hat, durch welchen die früheren Differentialien verschwunden sind, muss negativ sein, wenn die Function ein Maximum werden soll. Es ist leicht einzusehen, dass wenn auch $\frac{d^4f(x)}{dx^4}$ Null werden sollte, dass die Function nur dann ein Maximum werden kann, wenn auch $\frac{d^5f(x)}{dx^5}$ Null und zugleich $\frac{d^6f(x)}{dx^6}$ negativ wird, u. s. w.

Wenn es einen Werth von x gibt, durch welchen die Unterschiede

$$f(x+h) - f(x) \text{ und } f(x-h) - f(x)$$

stets positive Grössen werden, so ist dies ein Beweis, dass $f(x) < f(x+h)$ und zugleich $f(x) < f(x-h)$ ist, d. h. $f(x)$ wird für eben jenen Werth von x ein Minimum. Es kann dies nur für solche Werthe von x der Fall sein, durch welche $\frac{df(x)}{dx}$ gleich Null wird, indem nur in diesem Falle das Vorzeichen für die Werthe der Unterschiede $f(x+h) - f(x)$ und $f(x-h) - f(x)$ unabhängig von dem Vorzeichen von h ist, man erhält nämlich:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} \\ f(x-h) - f(x) &= \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} \end{aligned}$$

Wird also $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ positiv durch eben den Werth von x , durch welchen $\frac{df(x)}{dx}$ Null wird, so wird $f(x)$ durch den gleichen Werth von x ein Minimum. Wird auch $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ durch den Werth von x Null, durch welchen $\frac{df(x)}{dx}$ Null wurde, und wird nicht zu-

gleich $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ Null, so gibt es keinen Werth von x , durch welchen $f(x)$ ein Maximum oder Minimum werden kann. Wird dagegen auch $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ Null, so entscheidet das Vorzeichen von $\frac{d^4f(x)}{dx^4}$; ist dieses positiv, so wird für denselben Werth von x die Function ein Minimum, ist aber $\frac{d^4f(x)}{dx^4}$ negativ, so wird der Werth der Function ein Maximum.

Aus den bisherigen Untersuchungen geht folgende Regel hervor: um die Werthe von x zu erhalten, durch welche $f(x)$ ein Maximum oder Minimum werden kann, bestimme man die Wurzeln der Gleichung $\frac{df(x)}{dx} = 0$. Wird durch eine dieser Wurzeln $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ negativ, so ist $f(x)$ durch denselben Werth von x ein Maximum, wird aber $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ positiv, so ist $f(x)$ für den gleichen Werth von x ein Minimum. Wird $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ Null durch eine der Wurzeln der Gleichung $\frac{df(x)}{dx} = 0$, während $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ durch dieselbe Wurzel nicht Null wird, so ist $f(x)$ für den gleichen Werth von x weder ein Maximum noch ein Minimum; wird aber $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ ebenfalls Null und wird $\frac{d^4f(x)}{dx^4}$ negativ oder positiv, so ist in dem ersten Falle $f(x)$ für den gleichen Werth von x ein Maximum, in dem zweiten Falle ein Minimum; u. s. w.

34) Es wird zweckmässig sein, durch einige Beispiele die Lehren des vorhergehenden § zu erläutern.

1tes Beispiel. Man soll die Werthe von x bestimmen, durch welche die Formel $x^2 - x + h$ ein Maximum oder Minimum wird.

Setzt man $y = x^2 - x + h$, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2.$$

Aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ oder $2x - 1 = 0$ folgt $x = \frac{1}{2}$. Da $\frac{d^2y}{dx^2}$ für jeden Werth von x positiv ist, so wird y für den Werth $x = \frac{1}{2}$ ein Minimum.

2tes Beispiel. Man soll die Werthe von x bestimmen, durch welche die Formel $3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 24$ ein Maximum oder ein Minimum wird.

Setzt man $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 24$, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 12x^2 - 72x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 36x^2 + 24x - 72.$$

Die Wurzeln der Gleichung $12x^3 + 12x^2 - 72x = 0$ sind, $x=0$, $x=2$, $x=-3$. Durch die erste wird $\frac{d^2y}{dx^2} = -72$, daher y für $x=0$ ein Maximum. Durch die zweite wird $\frac{d^2y}{dx^2} = 120$, daher ist y für $x=2$ ein Minimum. Durch die dritte wird $\frac{d^2y}{dx^2} = 180$, daher ist y für $x=-3$ ein Minimum.

3tes Beispiel. Man soll die Werthe von x bestimmen, durch welche die Formel $\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 12$ ein Maximum oder Minimum wird.

Setzt man $y = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 12$, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3(x-2)^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6(x-2)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 6.$$

Die Wurzel der Gleichung $(x-2)^3 = 0$ ist $x=2$. Es wird durch denselben Werth von x $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{d^3y}{dx^3}$ Null, hingegen ist $\frac{d^4y}{dx^4}$ für jeden Werth von x eine positive Grösse, es ist daher y für $x=2$ ein Minimum.

4tes Beispiel. Man soll die Werthe von x bestimmen, durch welche die Formel $\frac{a^x}{x}$ ein Maximum oder Minimum wird.

Setzt man $y = \frac{a^x}{x}$, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^x \lg. a \cdot x - a^x}{x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^x (\lg. a)^2 x^2 - 2a^x \lg. a \cdot x + 2a^x}{x^3} = \frac{a^x}{x^3} [(x \lg. a - 1)^2 + 1]$$

Der Gleichung $a^x \lg. a \cdot x - a^x = 0$ geschieht Genüge, wenn man setzt $x = \frac{1}{\lg. a}$; hierdurch wird $\frac{d^2y}{dx^2} = a^{\frac{1}{\lg. a}} (\lg. a)^3$; es

wird daher y für den Werth $x = \frac{1}{\lg. a}$ ein Minimum.

5tes Beispiel. Man soll bestimmen durch welche Werthe von x die Formel $\frac{\lg. x}{x}$ ein Maximum oder Minimum wird.

Setzt man $y = \frac{\lg. x}{x}$, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \lg. x}{x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1 - 2(1 - \lg. x)}{x^3}$$

Aus der Gleichung $1 - \lg. x = 0$ folgt: $\lg. x = 1$, daher $x = e$, hierdurch wird $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{e^3}$; es wird daher y durch $x = e$ ein Maximum.

6tes Beispiel. Man soll bestimmen für welche Werthe von x die Formel $\frac{\sin. 2x - \cos. 2x}{a^2}$ ein Maximum oder Minimum wird.

Setzt man $y = \frac{\sin. 2x - \cos. 2x}{a^2}$, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cos. 2x + 2 \sin. 2x}{a^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4 \sin. 2x + 4 \cos. 2x}{a^2}$$

Aus der Gleichung $2 \cos. 2x + 2 \sin. 2x = 0$ folgt $\frac{\sin. 2x}{\cos. 2x} = -1$ oder $\text{tg. } 2x = -1$, und hieraus erhält man $2x = 180^\circ - 45^\circ$; hier-

durch wird $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4 \sin. 45^\circ - 4 \cos. 45^\circ}{a^2}$; es wird daher y ein Maximum, wenn man $x = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2}$ setzt.

7tes Beispiel. Man soll von allen in einen senkrechten Kegel beschriebenen Cylindern den Halbmesser von dem bestimmen, der den grössten körperlichen Inhalt hat.

Es sei h die Höhe und r der Halbmesser des Kegels, ferner sei x der Halbmesser und y die Höhe des eingeschriebenen Cylinders, dessen Inhalt ein Maximum werden soll. Der körperliche Inhalt des Cylinders ist:

$$V = \pi \cdot y \cdot x^2$$

ferner hat man:

$$r : h = x : (h - y)$$

hieraus folgt:

$$y = \frac{h}{r} (r - x)$$

Führt man diesen Werth ein, so erhält man:

$$V = \frac{\pi h}{r} (rx^2 - x^3)$$

in welchem Ausdruck x so bestimmt werden soll, dass V ein Maximum wird. Man erhält:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\pi h}{r} (2rx - 3x^2)$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\pi h}{r} (2r - 6x)$$

Die Gleichung $2rx - 3x^2 = 0$ hat die Wurzeln $x = 0$ und $x = \frac{2}{3}r$; durch $x = 0$ wird $\frac{d^2V}{dx^2} = \pi h \cdot 2$, daher V ein Minimum.

Durch $x = \frac{2}{3}r$ wird $\frac{d^2V}{dx^2} = -\pi h \cdot 2$, daher V ein Maximum. Für

$x = \frac{2}{3}r$ wird zugleich $y = \frac{h}{3}$; es wird daher jener der eingeschriebenen Cylinder den grössten Inhalt besitzen, dessen Höhe gleich ist dem dritten Theile der Höhe des Kegels.

8tes Beispiel. Man soll von allen in eine Kugel beschriebenen Cylindern den Halbmesser von jenem bestimmen, dessen Inhalt ein Maximum ist.

Es sei r der Halbmesser der Kugel, x der Halbmesser des gesuchten Cylinders und y dessen Höhe. Der Inhalt V des Cylinders ist

$$V = \pi x^2 y.$$

Es ist aber $4x^2 = 4r^2 - y^2$, daher:

$$V = \pi \frac{4r^2 - y^2}{4} \cdot y$$

man hat daher:

$$\frac{dV}{dy} = \pi (r^2 - \frac{3}{4} y^2)$$

$$\frac{d^2V}{dy^2} = -\pi \cdot \frac{3}{2} y.$$

Aus der Gleichung $r^2 - \frac{3}{4} y^2 = 0$ folgt $y = \pm \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Setzt man $y = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, so wird $\frac{d^2V}{dy^2}$ negativ, daher V ein Maximum; der Werth $y = -\frac{2r}{\sqrt{3}}$ hat hier geometrisch keine Bedeutung.

9tes Beispiel. Man soll aus einem kreisrunden Stamm, dessen Durchmesser d ist, einen Balken schneiden, dessen Tragkraft ein Maximum ist. Es wird als bekannt vorausgesetzt, dass die Tragkraft eines Balkens mit dem Quadrat der Höhe und in geradem Verhältniss mit der Breite des Balkens zunimmt.

Es sei x die Breite und y die Höhe des Balkens für den Fall der grössten Tragkraft, ferner sei α die Tragkraft für die Einheit der Längen- und Breitendimension. Die Tragkraft T für die Dimensionen x und y wird sein:

$$T = \alpha x y^2.$$

Es ist aber $y^2 = d^2 - x^2$; hierdurch wird:

$$T = \alpha x (d^2 - x^2)$$

Man hat daher:

$$\frac{dT}{dx} = \alpha (d^2 - 3x^2)$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\alpha 6x.$$

Aus der Gleichung $d^2 - 3x^2 = 0$ erhält man: $x = \pm \frac{d}{\sqrt{3}}$. Setzt man $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$, so wird $\frac{d^2T}{dx^2}$ negativ, daher T ein Maximum.

35) Wenn die vorgelegte Formel, deren Maxima- und Minima-Werthe bestimmt werden sollen, ein Bruch von der Form $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ist, so treten für die Bestimmung des zweiten Differentials einige Abkürzungen ein, die zu bemerken für die Anwendung von Nutzen ist. Setzt man nämlich $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} - \varphi(x) \cdot \frac{d\psi(x)}{dx}}{[\psi(x)]^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dx} \left(\psi(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} - \varphi(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right)}{[\psi(x)]^2} - \frac{2 \frac{d\psi(x)}{dx} \left(\psi(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} - \varphi(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right)}{[\psi(x)]^3}$$

Für jene Werthe von x , für welche $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ein Maximum oder Minimum werden soll, muss $\frac{dy}{dx} = 0$ sein; es wird hierdurch der zweite Theil des Ausdruckes für $\frac{d^2y}{dx^2}$ verschwinden, und es ist, um zu erfahren, ob die gegebene Function ein Maximum oder Minimum wird, nur nöthig zu prüfen, ob

$$\frac{\frac{d}{dx} \left(\psi(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} - \varphi(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right)}{[\psi(x)]^2}$$

negativ oder positiv wird. Da $[\psi(x)]^2$ jedenfalls eine positive Grösse ist, so hat man also nur zuzusehen, ob der Ausdruck

$$\frac{d \left(\psi(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} - \varphi(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right)}{dx}$$

negativ oder positiv wird.

Beispiel. Man soll die Werthe von x bestimmen, durch welche $\frac{1-x^2}{x^3+x}$ ein Maximum oder Minimum wird.

Setzt man $y = \frac{1-x^2}{x^3+x}$, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x(x^3+x) - (1-x^2)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2} = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^3+x)^2}$$

Die Gleichung $x^4-4x^2-1=0$ hat nur zwei reelle Werthe, nämlich $x = \sqrt{2+\sqrt{5}}$ und $x = -\sqrt{2+\sqrt{5}}$. Um zu prüfen, ob

die gegebene Formel durch einen dieser Werthe von x ein Maximum oder Minimum werde, hat man nur den Zähler des Bruches $\frac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^3 + x)^2}$ zu differentiren, und die Werthe von x einzuführen. Man erhält:

$$4x^3 - 8x.$$

Setzt man $x = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$, so wird $4x^3 - 8x$ gleich $4\sqrt{2 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{5}$; folglich wird durch den gleichen Werth von x die vorgelegte Formel ein Minimum.

Setzt man $x = -\sqrt{2 + \sqrt{5}}$, so wird $4x^3 - 8x$ gleich $-4\sqrt{2 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{5}$; es wird also in diesem Falle die vorgelegte Formel ein Minimum.

36) Wenn man die bisher vorgetragenen Lehren über die Bestimmung der Maxima- und Minima-Werthe der Functionen zusammenfasst, so bemerkt man, dass Alles darauf ankam zu untersuchen, ob für bestimmte Werthe der Veränderlichen die Unterschiede $f(x+h) - f(x)$ und $f(x-h) - f(x)$ zugleich positiv oder zugleich negativ werden. Ist das Erstere der Fall, so wird die Function durch den gleichen Werth der Veränderlichen ein Minimum, ist das Letztere der Fall, so wird sie ein Maximum. Um aber jene Werthe von x zu erkennen, durch welche überhaupt die beiden Unterschiede ein gleiches Vorzeichen erhalten, wurde zur Reihenentwicklung geschritten. Es ist klar, dass, so lange die nach steigenden Potenzen von h geordnete Reihe mit ungeraden Exponenten von h beginnt, die Unterschiede $f(x+h) - f(x)$ und $f(x-h) - f(x)$ für keinen Werth von x gleiche Vorzeichen besitzen können. Es wurden daher nur jene Werthe von x auf Maxima- und Minima-Werthe geprüft, durch welche die Vorzahl von h verschwindet. Zur Reihenentwicklung wurde nur die Taylor'sche Formel benutzt. Es ist dieselbe allgemein gültig, so lange x eine unbestimmte Grösse ist; sie ist auch gültig für die meisten speciellen Werthe von x ; es gibt aber bestimmte Werthe von x , für welche, wie in den §§. 30 und 31 gezeigt wurde, die Taylor'sche Reihe

nicht mehr anwendbar ist. Dies sind jene Werthe von x , durch welche die directe Entwicklung von $f(x+h)$ zu negativen oder gebrochenen Exponenten von h führt. Werthe dieser Art werden daran erkannt, dass durch dieselben das erste oder zweite oder eines der spätern Glieder der Taylor'schen Reihe ∞ wird. Es ist hiernach die frühere Untersuchung über Maxima- und Minima-Werthe der Functionen dahin zu erweitern, dass auch jene Werthe von x einer nähern Prüfung unterworfen werden müssen, durch welche $\frac{dfx}{dx}$ oder $\frac{d^2fx}{dx^2}$ oder überhaupt eines der späteren Glieder der Taylor'schen Reihe unendlich wird. Denn wird $\frac{dfx}{dx}$ durch einen bestimmten Werth von x unendlich, so kann durch eben diesen Werth von x , da überhaupt die Taylor'sche Reihe dann nicht mehr anwendbar ist, $f(x)$ möglicher Weise ein Maximum oder Minimum werden. Um aber dies zu entscheiden, hat man die öfter genannten Unterschiede für die Werthe von x , durch welche $\frac{df(x)}{dx}$ unendlich wird, direct nach steigenden Potenzen von h in Reihen zu entwickeln, und zuzusehen, ob das Vorzeichen des ersten Gliedes der Reihe unabhängig von dem Vorzeichen von h ist. Ist dies nicht der Fall, so wird die Function durch jenen Werth von x weder ein Maximum noch ein Minimum; im entgegengesetzten Falle entscheidet das Vorzeichen des Coefficienten des ersten Gliedes der Reihe. Ist dies positiv, so wird die Function ein Minimum, ist es negativ, so wird die Function ein Maximum.

37) Es werden folgende Beispiele zur Erläuterung des Vorgetragenen dienlich sein.

1tes Beispiel. Man soll die Werthe von x bestimmen, durch welche $f(x) = \sqrt[7]{(a-x)^2}$ ein Maximum oder Minimum wird.

Setzt man $y = \sqrt[7]{(a-x)^2}$, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[7]{(a-x)^5}},$$

es wird daher $\frac{dy}{dx}$ durch keinen Werth von x Null; durch $x = a$

wird aber $\frac{dy}{dx}$ unendlich, es ist daher zu prüfen, ob, wenn man $x=a$ setzt und $f(a \pm h) - f(a)$ nach steigenden Potenzen von h direct entwickelt, das Vorzeichen des ersten Gliedes der Reihe unabhängig von dem Vorzeichen von h ist. Man erhält:

$$f(a \pm h) - f(a) = (a - (a \pm h))^{\frac{2}{3}} = (\pm h)^{\frac{2}{3}} = h^{\frac{2}{3}}$$

Es ist daher $f(x)$ für $x=a$ ein Minimum.

2tes Beispiel. Man soll bestimmen, für welche Werthe von x die Formel $\sqrt[5]{(x^2 - x - 12)^4}$ ein Maximum oder Minimum wird.

Setzt man $y = \sqrt[5]{(x^2 - x - 12)^4}$, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2x-1}{\sqrt[5]{x^2-x-12}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt[5]{x^2-x-12}} - \frac{4}{5} \cdot \frac{d(x^2-x-12)}{dx} \cdot \frac{-\frac{1}{5}}{\sqrt[5]{x^2-x-12}} (2x-1)$$

Aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ folgt $x = \frac{1}{2}$. Führt man diesen

Werth in $\frac{d^2y}{dx^2}$ ein, so erhält man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt[5]{\frac{49}{4}}}$$

es wird daher, wenn man $x = \frac{1}{2}$ setzt, y ein Maximum. Es gibt aber überdies zwei Werthe von x , durch welche $\frac{dy}{dx}$ unendlich

wird, diese Werthe sind $x=4$ und $x=-3$. Um zu prüfen, ob

durch diese Werthe $f(x) = \sqrt[5]{(x^2 - x - 12)^4}$ ein Maximum oder

Minimum wird, hat man direct $f(4 \pm h) - f(4)$, und $f(-3 \pm h) - f(-3)$ in Reihen zu entwickeln. Man erhält im ersten Falle:

$$f(4 \pm h) - f(4) = \left((4 \pm h)^2 - (4 \pm h) - 12 \right)^{\frac{4}{5}} - \left(4^2 - 4 - 12 \right)^{\frac{4}{5}}$$

$$= \left(7 \cdot (\pm h) + h^2 \right)^{\frac{4}{5}} = 7^{\frac{4}{5}} h^{\frac{4}{5}} \pm \frac{4}{5} \cdot 7^{-\frac{1}{5}} h^{\frac{11}{5}} + \dots$$

Da $h^{\frac{4}{5}}$, man mag $+h$ oder $-h$ setzen, positiv ist, und da der Coefficient von $h^{\frac{4}{5}}$ eine positive Grösse ist, so wird y oder $f(x)$ für $x=4$ ein Minimum und zwar gleich Null. — Für $x=-3$ wird $f(x)$ ebenfalls gleich Null, und kleiner als für benachbarte Werthe von x , also auch ein Minimum. Denn man hat

$$f(-3 \pm h) - f(-3) = \left((-3 \pm h)^2 - (-3 \pm h) - 12 \right)^{\frac{4}{5}} - \left(3^2 + 3 - 12 \right)^{\frac{4}{5}} \\ = \left(7 \cdot (\mp h) + h^2 \right)^{\frac{4}{5}} = 7^{\frac{4}{5}} h^{\frac{4}{5}} \mp \frac{4}{5} \cdot 7^{\frac{1}{5}} h^{\frac{11}{5}} + \dots$$

es ist aber $h^{\frac{4}{5}}$ für $\mp h$ und $-h$ positiv, und zugleich ist der Coefficient von $h^{\frac{4}{5}}$ positiv, hierdurch wird die frühere Behauptung bestätigt. — Es ist nicht nöthig das zweite oder spätere Glieder der Reihe, die man durch directe Entwicklung von $f(x \pm h) - f(x)$ erhält, darzustellen, denn da diese Glieder höhere Potenzen von h als das erste besitzen, h aber so klein gedacht werden kann, dass die höheren Potenzen von h gegen die niederste verschwinden, so genügt es, das erste Glied der Reihe oder jenes mit der niedersten Potenz von h zu kennen.

3tes Beispiel. Man soll die Werthe von x bestimmen, durch welche die Formel $\frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{ax - x^2}$ ein Maximum oder Minimum wird.

Setzt man $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{ax - x^2}$, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{ax - x^2} + (a - 2x)\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{ax - x^2}} \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a - 2x - 2\sqrt{3} \sqrt{ax - x^2}}{2\sqrt{3} \cdot (ax - x^2)} - \frac{d(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx} \cdot \frac{2\sqrt{ax - x^2} + (a - 2x)\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

Aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ folgt $x = \frac{3}{4}a$ und $x = \frac{1}{4}a$. Durch $x = \frac{3}{4}a$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{16}{3\sqrt{3} \cdot a}$, und durch $x = \frac{1}{4}a$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8}{3\sqrt{3} \cdot a}$, es wird daher durch beide Werthe von x die vorgelegte Formel ein Maximum.

Es wird aber überdiess $\frac{dy}{dx}$ durch die Werthe $x = 0$, und $x = a$ unendlich. Setzt man $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{ax - x^2}$, und entwickelt man den Unterschied $f(0 \pm h) - f(0)$ direct in eine Reihe, so erhält man:

$$f(0 \pm h) - f(0) = (\pm h)^{\frac{1}{2}} \sqrt{a} + \dots$$

Die Function wird daher, wenn man $x=0$ setzt, weder ein Maximum noch ein Minimum. Da aber durch $+h$ der Unterschied reell und durch $-h$ der Unterschied imaginär wird, so ist nach dem, was in §. 33 angeführt wurde, Null ein Grenzwert der Function.

Um zweitens den Fall $x=a$ näher zu prüfen, hat man den Unterschied $f(a \pm h) - f(a)$ direct in eine Reihe zu entwickeln. Man erhält :

$$f(a \pm h) - f(a) = (\pm h)^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{a \pm \dots}$$

es wird daher auch durch $x=a$ die Function weder ein Maximum noch ein Minimum. Es ist dagegen $\frac{a}{\sqrt[3]{3}}$, welches der Werth der Function für $x=a$ ist, ein Grenzwert der Function.

4tes Beispiel. Man soll die Werthe von x bestimmen, durch welche die Formel $\sqrt{(a-x)^3 + bx}$ ein Maximum oder Minimum wird, oder einen Grenzwert erhält.

Setzt man $y = \sqrt{(a-x)^3 + bx}$, so erhält man :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2} \sqrt{a-x} + b$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{a-x}}$$

Aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ folgt: $x = a - \frac{4}{9}b^2$; führt man diesen Werth in $\frac{d^2y}{dx^2}$ ein, so erhält man $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{b}$; es wird daher y für $x = a - \frac{4}{9}b^2$ ein Minimum.

Setzt man $x=a$, so wird $\frac{dy}{dx} = b$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$. Da für diesen

Werth von x $\frac{dy}{dx}$ weder Null, noch unendlich wird, so kann für $x=a$ die Function weder ein Maximum noch ein Minimum werden. Es könnte aber sein dass $x=a$ zu einem Grenzwert der Function führt, denn da $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich durch $x=a$ wird, so ist dies ein Beweis, dass die directe Entwicklung von $f(a \pm h) - f(a)$ gebrochene Exponenten von h enthält. Es kommt daher

darauf an, den Bruchexponenten von h näher zu ermitteln; man erhält durch directe Entwicklung:

$$f(a \pm h) - f(a) = b(\pm h) + (\pm h)^{\frac{3}{2}}$$

Man erkennt hieraus, dass $f(x)$ für $x = a + h$ reell, und für $x = a - h$ imaginär wird, dass daher $y = bx$ ein Grenzwert von y ist. Es ist wohl kaum nöthig zu bemerken, dass unter $f(x)$ die vorgelegte Formel $\sqrt{(a-x)^3} + bx$ zu verstehen ist.

5tes Beispiel. Man soll die Werthe von x bestimmen, durch welche $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 5x + 6)^4}$ ein Maximum oder Minimum wird.

Setzt man $y = \sqrt[3]{(x^2 - 5x + 6)^4}$, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{(x^2 - 5x + 6)} \cdot (2x - 5)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{9} \frac{(2x - 5)^2}{\sqrt[3]{(x^2 - 5x + 6)^2}} + \frac{8}{3} \cdot \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$$

Der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ geschieht Genüge durch die Werthe $x = \frac{5}{2}$, $x = 2$, $x = 3$. Durch den ersten dieser Werthe wird $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, daher y ein Maximum.

In dem Falle $x = 2$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$, es führt daher dieser Werth von x in der Entwicklung von $f(2 \pm h) - f(2)$ zu gebrochenen Exponenten von h ; man erhält:

$$f(2 \pm h) - f(2) = 3^{\frac{4}{3}} (\pm h)^{\frac{4}{3}} + \dots$$

Es ist dieser Unterschied für $+h$ und $-h$ positiv, es wird daher y , wenn $x = 2$ ist, ein Minimum.

In dem Falle $x = 3$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$. Man hat daher $f(3 \pm h) - f(3)$ direct in einer Reihe zu entwickeln. Man erhält:

$$f(3 \pm h) - f(3) = (\pm h)^{\frac{4}{3}} + \dots$$

und erkennt, dass dieser Unterschied für jeden Werth von h positiv ist. Es wird daher y für $x = 3$ ein Minimum.

38) Maxima und Minima der Functionen zweier veränderlicher Grössen. Die Bestimmung der Maxima und Minima-Werthe der Functionen zweier veränderlichen Grössen erfolgt auf ähnliche Weise, wie bei Functionen einer Veränderlichen. Zunächst ist klar, dass wenn

$$f(x+h, y+k) - f(x, y)$$

für bestimmte Werthe von x und y stets positiv ist, und zwar wenn man $+h$ oder $-h$, $+k$ oder $-k$ setzt, dass in diesem Falle durch eben jene Werthe von x und y die Function ein Minimum wird. Wird aber

$$f(x+h, y+k) - f(x, y)$$

durch bestimmte Werthe von x und y stets negativ, so wird durch dieselben Werthe $f(x, y)$ ein Maximum.

Man hat nach No. 58

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \frac{du}{dx} \cdot h + \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{du}{dy} \cdot k + \frac{d^2u}{dx dy} \cdot h k + \frac{d^2u}{dy^2} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \dots$$

wo $f(x, y)$ der Kürze halber durch u bezeichnet ist. Soll dieser Unterschied durch bestimmte Werthe von x und y , unabhängig von den Vorzeichen von h und k , stets positiv oder stets negativ werden, so müssen jedenfalls durch eben jene Werthe von x und y die partiellen Differentialquotienten $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ verschwinden. Es werden daher die Werthe von x und y , welche man aus den Gleichungen

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0$$

erhält, die gegebene Function $f(x, y)$ zu einem Maximum oder Minimum machen können. Ein Maximum wird die Function werden, wenn durch dieselben Werthe von x und y der Ausdruck

$$\frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^2u}{dx dy} \cdot h k + \frac{d^2u}{dy^2} \cdot \frac{k^2}{1.2}$$

für jeden Werth von h und k negativ wird, ein Minimum wenn dieser Ausdruck positiv wird. Die Grössen h und k sind ganz unabhängig von einander, aber jede ist an sich eine sehr kleine Grösse, man kann daher setzen $k = \alpha h$. Man erhält hierdurch:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^2u}{dx dy} \cdot h k + \frac{d^2u}{dy^2} \cdot \frac{k^2}{1.2} = a \cdot \frac{h^2}{1.2} + b h^2 \alpha + c \frac{h^2}{1.2} \cdot \alpha^2$$

wo der Kürze halber

$$\frac{d^2u}{dx^2} = a, \quad \frac{d^2u}{dx dy} = b, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = c$$

gesetzt ist. Es kömmt darauf an zu bestimmen, bei welcher

Beschaffenheit von a , b und c der Ausdruck $\frac{ah^2}{1.2} + bh^2\alpha + c \frac{h^2}{1.2} \alpha^2$

oder $\frac{h^2}{1.2} \cdot c \left(\alpha^2 + 2 \frac{b}{c} \alpha + \frac{a}{c} \right)$, unabhängig von α , stets posi-

tiv oder stets negativ wird. Das Vorzeichen des Ausdruckes

$\alpha^2 + 2 \frac{b}{c} \alpha + \frac{a}{c}$ ist in zwei Fällen von den Vorzeichen von α

unabhängig, nämlich erstens wenn $\alpha^2 + 2 \frac{b}{c} \alpha + \frac{a}{c}$ ein vollständiges

Quadrat ist, und zweitens, wenn derselbe Ausdruck gleich

ist einem vollständigen Quadrat plus einer positiven Grösse,

d. h. also, wenn er das Produkt zweier imaginären Factoren ist.

Der erste dieser Fälle verlangt, dass

$$\frac{a}{c} = \frac{b^2}{c^2} \text{ oder dass } b^2 = ac$$

ist; der zweite verlangt, dass

$$\frac{a}{c} > \frac{b^2}{c^2} \text{ oder dass } b^2 < ac$$

ist. Beide Fälle können, da b^2 stets positiv ist, nur dann Statt haben, wenn a und c gleiche Zeichen besitzen.

Es geht aus dem Bisherigen hervor, dass die Werthe von x und y , die aus den Gleichungen $\frac{du}{dx} = 0, \frac{du}{dy} = 0$ erhalten wer-

den, nur dann zu einem Maximum - oder Minimum - Werth von $f(x, y)$ führen können, wenn durch dieselbe Werthe von x und y

1) a und c d. h. $\frac{d^2u}{dx^2}$ und $\frac{d^2u}{dy^2}$ gleiche Zeichen erhalten, und

2) wenn b^2 entweder gleich oder kleiner als $a c$ ist. Die Erfüllung dieser beiden Bedingungen sagt indess nur aus, dass der Ausdruck $a^2 + 2 \frac{b}{c} a + \frac{a}{c}$ unabhängig von dem Vorzeichen von a und stets positiv ist. Das Vorzeichen der Formel

$$\frac{h^2}{1.2} \cdot c \left(a^2 + 2 \frac{b}{c} a + \frac{a}{c} \right)$$

ist daher nur von dem Zeichen des Coefficienten c abhängig; ist c negativ, so wird die Function ein Maximum, ist c positiv, so wird sie ein Minimum.

Beispiel. Man soll die Werthe von x und y finden, durch welche die Formel $x^2 - 6xy + y^3 + 3x + 6y$ ein Maximum oder Minimum wird.

Setzt man $u = x^2 - 6xy + y^3 + 3x + 6y$, so erhält man:

$$\frac{du}{dx} = 2x - 6y + 3$$

$$\frac{du}{dy} = -6x + 3y^2 + 6.$$

Durch wiederholte Differentiation erhält man:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2, \quad \frac{d^2u}{dx dy} = -6, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = 6y$$

Den Gleichungen

$$2x - 6y + 3 = 0$$

$$-6x + 3y^2 + 6 = 0$$

geschieht Genüge 1) durch die Werthe:

$$x = \frac{27}{2}, \quad y = 5;$$

2) durch die Werthe

$$x = \frac{3}{2}, \quad y = 1.$$

Für die ersten Werthe ist $\frac{d^2u}{dx^2} = 2, \quad \frac{d^2u}{dx dy} = -6, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = 30,$

oder $a = 2, b = -6, c = 30$. Da hiernach a und c gleiche Zeichen besitzen, und $b^2 < ac$ ist, so sind hiermit die Bedingungen erfüllt, unter welchen die Function überhaupt ein Maximum oder Minimum werden kann. Da ferner c positiv ist, so wird u durch die Werthe $x = \frac{27}{2}$ und $y = 5$ ein Minimum.

Durch $x = \frac{3}{2}$ und $y = 1$ wird $a = 2$, $b = -6$, $c = 6$. Hier haben zwar a und c gleiche Zeichen, dagegen wird die Bedingung $b^2 < ac$ nicht erfüllt, es wird daher u durch die Werthe $x = \frac{3}{2}$, $y = 1$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

39) Wenn durch die Werthe von x und y , durch welche $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ Null werden, auch die zweiten Differentialien, nämlich $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx dy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$ verschwinden, so können dieselben nur dann zu einem Maximum- oder Minimum- Werth der Function führen, wenn mindestens zugleich die dritten Differentialien verschwinden. Der Werth der vierten Differentialien wird dann entscheiden. Ist er positiv, so wird die Function ein Minimum; ist er negativ, so wird die Function ein Maximum. Die vierten Differentialien sind nach dem Taylor'schen Problem in folgender Weise mit h und k verbunden

$$\frac{d^4u}{dx^4} \cdot \frac{h^4}{1.2.3.4} + \frac{d^4u}{dx^3 dy} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} \cdot k + \frac{d^4u}{dx^2 dy^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^4u}{dx dy^3} \cdot h \cdot \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{d^4u}{dy^4} \cdot \frac{k^4}{1.2.3.4}$$

Setzt man hierin $k = \alpha h$, so erhält man:

$$\frac{h^4}{1.2.3.4} \left(\frac{d^4u}{dx^4} + 4 \frac{d^4u}{dx^3 dy} \alpha + 6 \frac{d^4u}{dx^2 dy^2} \alpha^2 + 4 \frac{d^4u}{dx dy^3} \alpha^3 + \frac{d^4u}{dy^4} \alpha^4 \right)$$

Bezeichnet man die Differentialquotienten nach der Reihe durch a, b, c, d, e , so erhält man:

$$\frac{h^4 e}{1.2.3.4} \left(\frac{a}{e} + 4 \frac{b}{e} \alpha + 6 \frac{c}{e} \alpha^2 + 4 \frac{d}{e} \alpha^3 + \alpha^4 \right)$$

Man erkennt, dass nur dann, wenn dieser Ausdruck, unabhängig vom Zeichen von α , positiv oder negativ wird, die Function ein Minimum oder Maximum werden kann. Das Vorzeichen dieses Ausdrucks ist in vier Fällen vom Zeichen von α unabhängig, nämlich:

1) wenn die vier Factoren der Formel

$$\frac{a}{e} + 4 \frac{b}{e} \alpha + 6 \frac{c}{e} \alpha^2 + 4 \frac{d}{e} \alpha^3 + \alpha^4$$

reell und gleich sind,

2) wenn je zwei der vier Factoren derselben Formel gleich und reell sind;

3) wenn die Formel aus zwei gleichen reellen und aus zwei imaginären Factoren besteht;

4) wenn die Formel aus vier imaginären Factoren besteht.

Die Bedingungen, unter welchen die Beschaffenheit der Werthe von a, b, c, d, e einem der drei ersten Fällen entsprechen, lassen sich leicht bestimmen, dagegen führt die Feststellung der Bedingung, unter welcher der vierte Fall eintritt, zu Weitläufigkeiten, und namentlich zur Auflösung einer algebraischen Gleichung des vierten Grades. Es ist daher in den Fällen, in welchen die zweiten und dritten Differentialien der gegebenen Function durch jene Werthe von x und y verschwinden, durch welche $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ Null werden, zweckmäs-

siger, durch directe Reihenentwicklung den Unterschied

$$f(x \pm h, y \pm k) - f(x, y)$$

zu prüfen.

40) Es wurden bisher nur jene Werthe von x und y , welche aus den Gleichungen $\frac{du}{dx} = 0$ und $\frac{du}{dy} = 0$ erhalten werden, als solche bezeichnet, durch welche $u=f(x,y)$ ein Maximum oder Minimum werden könne. Es ist aber nach dem, was über Maxima- und Minima-Werthe der Functionen einer Veränderlichen gelehrt wurde, klar, dass hierdurch nicht alle Werthe von x und y erkannt werden, durch welche $f(x,y)$ zu einem Maximum oder Minimum wird, sondern dass auch jene Werthe von x und y hierzu führen können, durch welche entweder

$$\frac{du}{dx} = 0 \text{ und } \frac{du}{dy} = \infty$$

$$\text{oder } \frac{du}{dx} = \infty \text{ und } \frac{du}{dy} = 0$$

$$\text{oder } \frac{du}{dx} = \infty \text{ und } \frac{du}{dy} = \infty$$

wird. Um aber in dem einen oder andern dieser Fälle zu entscheiden, ob die Function ein Maximum oder Minimum werde, hat

man den Unterschied $f(x \pm h, y \pm k) - f(x, y)$ direct nach steigenden Potenzen von h und k in eine Reihe zu entwickeln. Erhält man, unabhängig von den Vorzeichen von h und k , einen positiven Werth für diesen Unterschied, so wird die Function durch dieselben Werthe von x und y ein Minimum; ist der Unterschied negativ, so wird die Function ein Maximum.

Die directe Entwicklung in Reihen ist hier aus demselben Grunde nöthig, wie früher bei Functionen nur einer veränderlichen Grösse; nämlich desshalb, weil wenn einer der partiellen Differentialquotienten $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$ durch bestimmte Werthe von x und y unendlich wird, das Taylor'sche Problem zur Entwicklung in Reihen keine Anwendung findet.

41) Eine Function dreier veränderlicher Grössen wird durch jene Werthe der Veränderlichen ein Maximum, durch welche

$f(x + h, y + k, z + l) - f(x, y, z)$ unabhängig von dem Vorzeichen der Grössen h, k, l , negativ wird. Ein Minimum wird die Function durch jene Werthe von x, y, z , durch welche jene Differenz positiv wird. Setzt man $k = \alpha h, l = \beta h$, so hat man nach No. 59

$$\begin{aligned} f(x+h, y+\alpha h, z+\beta h) - f(x, y, z) = & \frac{du}{dx} \cdot h + \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \dots \\ & + \frac{du}{dy} \alpha h + \frac{d^2u}{dx dy} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} \alpha + \dots \\ & + \frac{du}{dz} \beta h + \frac{d^2u}{dx dz} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} \beta + \dots \\ & + \frac{d^2u}{dy^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} \alpha^2 + \dots \\ & + \frac{d^2u}{dy dz} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} \alpha \beta + \dots \\ & + \frac{d^2u}{dz^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} \beta^2 + \dots \end{aligned}$$

Die Werthe von x, y, z , durch welche dieser Unterschied, unabhängig von h , positiv oder negativ werden kann, sind daher auch hier aus den Gleichungen $\frac{du}{dx} = 0, \frac{du}{dy} = 0, \frac{du}{dz} = 0$ zu

bestimmen. Man hat diese Werthe in den zweiten Differentia-
lien einzuführen, und zu prüfen, welches Vorzeichen hierdurch
der Ausdruck

$$\frac{h^2}{1.2} \left(\frac{d^2u}{dx^2} + 2 \cdot \frac{d^2u}{dx dy} \cdot \alpha + 2 \frac{d^2u}{dx dz} \cdot \beta + \frac{d^2u}{dy^2} \cdot \alpha^2 + 2 \frac{d^2u}{dy dz} \alpha \beta + \frac{d^2u}{dz^2} \beta^2 \right)$$

erhält. Wenn das Vorzeichen dieses Ausdruckes, der der Kürze
halber durch A bezeichnet werden soll, nicht unabhängig von
 α und β ist, so kann der Werth der Function weder ein Maxi-
mum noch ein Minimum werden. Es ist daher zunächst festzu-
stellen, unter welchen Bedingungen das Vorzeichen von A unab-
hängig von den Zeichen α und β ist. Bezeichnet man die Diffe-
rentialquotienten $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx dy}$... nach der Reihe durch a, b, c, d, f, g,
so erhält man:

$$A = \frac{h^2}{1.2} \left(a + 2b\alpha + 2c\beta + d\alpha^2 + 2f \cdot \alpha\beta + g\beta^2 \right).$$

Man erhält hieraus:

$$A = \frac{h^2}{1.2} \cdot g \left(\frac{a}{g} + 2 \frac{b}{g} \alpha + 2 \frac{c}{g} \beta + \frac{d}{g} \alpha^2 + 2 \frac{f}{g} \cdot \alpha\beta + \beta^2 \right)$$

und

$$A = \frac{h^2}{1.2} \cdot d \left(\frac{a}{d} + 2 \frac{c}{d} \beta + 2 \frac{b}{d} \alpha + \frac{g}{d} \beta^2 + 2 \frac{f}{d} \cdot \beta\alpha + \alpha^2 \right).$$

Die in Klammern stehenden Ausdrücke sind in zwei Fällen von
den Zeichen von α und β unabhängig, nämlich

- 1) wenn sie aus zwei gleichen reellen Factoren bestehen,
- 2) wenn sie aus zwei imaginären Factoren bestehen.

Bestehen sie aus zwei gleichen reellen Factoren, so ist die
Form derselben entweder $(x + y\alpha + \beta)^2$ oder $(x + y\beta + \alpha)^2$;
bestehen sie aus zwei imaginären Factoren, so ist die Form
des Productes derselben entweder $(x + y\alpha + \beta)^2 + z^2$ oder
 $(x + y\beta + \alpha)^2 + z^2$. Man erkennt leicht, dass diese hier aufge-
führten Formen, unabhängig von dem Zeichen von α und β ,
stets positive Werthe besitzen. Stimmen die in Klammern ste-
henden Ausdrücke mit einer dieser Formen überein, so hängt
das Vorzeichen von A nur von dem Zeichen von g oder von

dem Zeichen von d ab. Es lässt sich leicht beweisen, dass der Ausdruck

$$\frac{a}{g} + 2 \frac{b}{g} \alpha + 2 \frac{c}{g} \beta + \frac{d}{g} \alpha^2 + 2 \frac{f}{g} \alpha \beta + \beta^2$$

aus zwei gleichen reellen Factoren besteht, wenn

$$\text{I) } c^2 = ag, bd = cf, f^2 = gd,$$

und dass er aus zwei imaginären Factoren besteht, wenn

$$\text{II) } c^2 < ag, bd = cf, f^2 = gd.$$

Der Ausdruck:

$$\frac{a}{d} + 2 \frac{c}{d} \beta + 2 \frac{b}{d} \alpha + \frac{g}{d} \beta^2 + 2 \frac{f}{d} \beta \alpha + \alpha^2$$

besteht aus zwei gleichen reellen Factoren, wenn

$$\text{III) } b^2 = ad, cd = bf, f^2 = gd,$$

und er besteht aus zwei imaginären Factoren, wenn

$$\text{IV) } b^2 < ad, cd = bf, f^2 = gd.$$

Da c^2 , f^2 , b^2 jedenfalls positive Grössen sind, so erkennt man, dass, wenn irgend eine der vier Bedingungen erfüllt sein soll, mindestens a , g und d gleiche Zeichen besitzen müssen. Ist dies aber der Fall und wird eine der Bedingungen erfüllt, so ist A positiv oder negativ, je nach dem Zeichen von g ; die Function wird daher ein Minimum oder Maximum werden, je nach dem Zeichen von g .

Ausser den Werthen von x , y , z , welche sich aus den Gleichungen $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{du}{dy} = 0$, $\frac{du}{dz} = 0$ ergeben, sind auch jene aufzusuchen, durch welche eine oder zwei oder alle drei Differentialquotienten unendlich werden. Auch durch sie kann die Function ein Maximum oder Minimum werden, was indess, aus den schon öfter angeführten Gründen, durch directe Reihenentwicklung näher zu prüfen ist.

Der hier vorgezeichnete Weg ist in gleicher Weise bei Bestimmung der Maxima- und Minima-Werthe der Functionen von vier und mehreren veränderlichen Grössen zu befolgen.

42) Maxima und Minima unentwickelter Functionen. Die Art der Herleitung der Maxima - und Minima - Werthe einer Veränderlichen, die durch eine Gleichung mit einer andern Veränderlichen verbunden ist, bedarf nach dem bisherigen nur einer kurzen Andeutung. — Gesetzt es sei die unentwickelte Function $u = \varphi(x, y) = 0$, und es sollen die Werthe von x bestimmt werden, durch welche y ein Maximum oder Minimum wird. Nach § 16 hat man:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}.$$

Differentirt man von Neuem so erhält man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{\frac{du}{dy} \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dx dy} \cdot \frac{dy}{dx} \right) - \frac{du}{dx} \left(\frac{d^2u}{dx dy} + \frac{d^2u}{dy^2} \cdot \frac{dy}{dx} \right)}{\left(\frac{du}{dy} \right)^2}.$$

Die Werthe von x , durch welche y ein Maximum oder Minimum werden kann, sind enthalten in den Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \infty$$

Verbindet man jede dieser Gleichung mit der gegebenen Gleichung $\varphi(x, y) = 0$, so erhält man die zusammengehörigen Werthe von x und y , d. h. jene Werthe von x , durch welche y ein Größtes oder Kleinstes wird. Um zu entscheiden, ob einem bestimmten Werth von x , den man aus den Gleichungen $\frac{dy}{dx} = 0$ und $\varphi(x, y) = 0$ erhält, ein Maximum oder Minimum von y entspricht, hat man zu untersuchen, welches Vorzeichen $\frac{d^2y}{dx^2}$ durch die gleichen Werthe von x und y erhält. Da in dem Falle, in welchem $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, auch $\frac{du}{dx} = 0$ wird, so reducirt sich der Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ auf folgenden einfachen Bruch:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{\frac{d^2u}{dx^2}}{\frac{du}{dy}}$$

Die Werthe von x und y , welche den Gleichungen $\frac{dy}{dx} = \infty$ und $\varphi(x, y) = 0$ entsprechen, können aus schon öfter angeführten Gründen nur durch directe Reihenentwicklung von $\varphi(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y) = 0$ auf Maxima- und Minima-Werthe geprüft werden.

Beispiel. Es ist gegeben die Gleichung $(y-x)^3 + x + 6 = 0$. Man soll die Werthe von x bestimmen, durch welche y ein Maximum oder Minimum wird.

Es ist nach § 14

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{-3(y-x)^2 + 1}{3(y-x)^2}$$

Und für den Fall, dass $\frac{dy}{dx} = 0$, hat man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{6(y-x)}{3(y-x)^2}$$

Aus den Gleichungen $\frac{dy}{dx} = 0$, und $(y-x)^3 + x + 6 = 0$, folgt:

$$1) \quad x = -6 - \frac{1}{3\sqrt{3}} \text{ und } y = -6 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$2) \quad x = -6 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \text{ und } y = -6 - \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Im ersten Falle erhält man $\frac{d^2y}{dx^2} = -2\sqrt{3}$ und im zweiten $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sqrt{3}$; es wird daher y durch $x = -6 - \frac{1}{3\sqrt{3}}$ ein Maximum, und durch $x = -6 + \frac{1}{3\sqrt{3}}$ ein Minimum.

Es sind noch die Fälle, welche sich aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \infty$ ergeben, zu untersuchen. Es wird $\frac{dy}{dx}$ unendlich, wenn $y - x = 0$ ist. Verbindet man diese Gleichung mit der Gegebenen, so erhält man:

$$x = -6, \quad y = -6.$$

Setzt man in der gegebenen Gleichung $-6 + \Delta x$ statt x , und $-6 + \Delta y$ statt y , so erhält man:

$$\Delta y = -\Delta x^{\frac{1}{3}} + \Delta x$$

Es wird daher y , wenn man $x = -6$ setzt, weder ein Maximum noch ein Minimum.

43) Aus zwei Gleichungen, welche drei veränderliche Größen enthalten, kann eine der Veränderlichen eliminirt werden; man erhält hierdurch eine Gleichung von nur zwei Veränderlichen, und kann daher bei Bestimmung der Maxima- und Minima-Werthe das eben gelehrt Verfahren in Anwendung bringen. Dies führt indessen nicht selten zu sehr verwickelten Rechnungen. Man kann dann ein anderes Verfahren versuchen, welches im Wesentlichen darauf zurückkömmt, dass die Elimination nicht unter den Veränderlichen der Gleichungen selbst, sondern unter den Differentialien der gegebenen Gleichungen ausgeführt wird. Es soll dies an einem einfachen Falle dargelegt werden, welcher zugleich genügen wird, den Weg zu bezeichnen, der in zusammengesetzteren Fällen einzuschlagen ist.

Es seien $z=f(x,y)$ und $\varphi(x,y)=0$ die gegebenen Gleichungen. Es sollen die Werthe von x und y bestimmt werden, durch welche z ein Maximum oder Minimum wird.

Aus der Gleichung $\varphi(x,y)=0$ folgt, dass y eine Function von x ist. Berücksichtigt man dies bei der Differentiation der Gleichung $z=f(x,y)$, so erhält man:

$$\alpha) \frac{dz}{dx} = \frac{df(x,y)}{dx} + \frac{df(x,y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

und

$$\beta) \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2f(x,y)}{dx^2} + 2 \frac{d^2f(x,y)}{dx \cdot dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2f(x,y)}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{df(x,y)}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}.$$

$\frac{dz}{dx}$ und $\frac{d^2z}{dx^2}$ sind die vollständigen Differentialquotienten von z und von $\frac{dz}{dx}$, dagegen sind $\frac{df(x,y)}{dx}$, $\frac{df(x,y)}{dy}$ u. s. w. nur partielle Differentialquotienten.

Durch die Differentiation der Gleichung $\varphi(x,y)=0$ erhält man: $\frac{d\varphi(x,y)}{dx} + \frac{d\varphi(x,y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$, hieraus folgt:

$$\gamma) \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{d\varphi(x,y)}{dx}}{\frac{d\varphi(x,y)}{dy}}$$

Differentirt man von Neuem, so erhält man:

$$\delta) \frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{\frac{d\varphi(x,y)}{dy} \left(\frac{d^2\varphi(x,y)}{dx^2} + \frac{d^2\varphi(x,y)}{dx dy} \cdot \frac{dy}{dx} \right) - \frac{d\varphi(x,y)}{dx} \left(\frac{d^2\varphi(x,y)}{dx dy} + \frac{d^2\varphi(x,y)}{dy^2} \cdot \frac{dy}{dx} \right)}{\left(\frac{d\varphi(x,y)}{dy} \right)^2}$$

Eliminirt aus den Gleichungen α und γ den Quotienten $\frac{dy}{dx}$, so findet man:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{df(x,y)}{dx} \cdot \frac{d\varphi(x,y)}{dy} - \frac{df(x,y)}{dy} \cdot \frac{d\varphi(x,y)}{dx}}{\frac{d\varphi(x,y)}{dy}}$$

Die Werthe von x und y , durch welche z ein Maximum oder Minimum werden kann, sind enthalten in den Gleichungen

$$\frac{dz}{dx} = 0, \text{ und } \frac{dz}{dx} = \infty.$$

Man hat jede dieser Gleichungen mit der gegebenen Gleichung $\varphi(x,y) = 0$ zu verbinden, um hieraus die zusammengehörigen Werthe von x und y zu erhalten. Um aber endlich zu erkennen, ob durch diese Werthe z ein Maximum oder Minimum wird, hat man die Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus den Gleichungen γ und δ in der Gleichung β einzuführen, und dann zu untersuchen, welches Vorzeichen der Werth von $\frac{d^2z}{dx^2}$ durch die zu prüfenden Werthe von x und y erhält; je nachdem es positiv oder negativ wird, wird z ein Minimum oder ein Maximum.

In der Anwendung zeigt es sich, dass dieses Verfahren nicht selten zu eben solchen Verwickelungen des Calcul's führt, wie wenn man direct die Elimination der Veränderlichen aus den gegebenen Gleichungen ausgeführt hätte. Man hat daher nicht immer der eben vorgetragenen Methode vor der directen Elimination den Vorzug zu geben, und wird sie überhaupt nur dann versuchen, wenn die directe Elimination allzuweitläufig werden sollte.

44) Fasst man die bisher vorgetragenen Lehren zusammen, so ergibt sich, dass es in allen Fällen darauf ankömmt, die Differenz $f(x+h) - f(x)$ oder die Differenz $f(x+h, y+h) - f(x,y)$, u. s. w. nach steigenden Potenzen von h oder von h und k u. s. w. zu entwickeln. Die Coefficienten von h oder von h und k u. s. w. geben, indem sie gleich Null und gleich Unendlich gesetzt werden, die Gleichungen, durch deren Wurzeln die vorgelegten Functionen zu einem Maximum oder Minimum werden können.

Dem Grundgedanken nach hatte schon Fermat diese Methode zur Bestimmung der Maxima- und Minima-Werthe ganzer rationaler Functionen in Anwendung gebracht. Die Erfindung der Differentialrechnung so wie die einer kürzeren und bequemeren Zeichensprache brachten indess in die Untersuchung dieses Gegenstandes, wie überhaupt in alle analytische Forschungen, erst die Einfachheit, Klarheit und Allgemeinheit, welche zu einer umfassenden wissenschaftlichen Darstellung erforderlich sind. Newton und Leibnitz, die unabhängig von einander, der eine geleitet durch Untersuchungen in der Dynamik, der andere geleitet durch geometrische Forschungen, die Differentialrechnung erfanden, haben zugleich mit der Bekanntmachung ihrer neuen Methode, deren Anwendung zur Auffindung der Maxima und Minima der Functionen einer Veränderlichen gelehrt; Newton in seiner Schrift: *Methodus Fluxionum et serierum infinitarum, cum ejusdem applicatione ad Curvarum Geometriam*, und Leibnitz in den *Actis Erud.* 1684. Jacob und Johann Bernoulli erweiterten die Theorie der Maxima und Minima unter Anwendung derselben auf verschiedene zum Theil schwierige Probleme der Geometrie und Mechanik, während Marquis de l'Hôpital durch sein vortrefflich dargestelltes, im Anfange des vergangenen Jahrhunderts so geschätztes, Lehrbuch: „*Analyse des infiniment petits*“ vorzugsweise zur grössern Verbreitung der neu gewonnenen Wahrheiten beitrug. L. Euler hat im zweiten Theile seiner Differentialrechnung im 10. und 11 Kapitel mit der ihm eigenthümlichen Klarheit die Theorie der Maxima und

Minima unter Zugrundlegung der Taylor'schen Reihe, vorge-
tragen, und zugleich dieselbe auf Functionen zweier Veränder-
lichen ausgedehnt. Doch ist in Bezug auf diesen letzten Punkt
seine Darstellung mangelhaft, was erst später von Lagrange
erkannt, aber auch sogleich von demselben in einer Abhand-
lung in den Miscellaneis Soc. Taur. T. I. verbessert und er-
gänzt wurde. Von neueren Autoren hat M. Ohm diesen Gegen-
stand am umfassendsten und vollständigsten in seinem Werke
„Lehre des Grössten und Kleinsten. Berlin 1825“ dargestellt.

Sechster Abschnitt.

*Bestimmung der Werthe reeller Functionen für jene
Fälle, in welchen die Functionen durch specielle Wer-
the der Veränderlichen unter einer der unbestimm-
ten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 u. s. w. er-
scheinen.*

45) Es tritt zuweilen ein, dass der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ durch spe-
cielle Werthe von x eine der unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ u. s. w.
erhält. Ebenso kann es eintreten, dass die Exponentialgrösse
[F(x)]^{f(x)} durch specielle Werthe von x in einer der unbestimm-
ten Formen 0^0 , ∞^0 , u. s. w. erscheint. Die Bestimmung der
Werthe der Functionen für jene Fälle, in welchen dieselben eine
der unbestimmten Formen annehmen, ist Gegenstand der näch-
sten Untersuchung.

Wenn der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$, indem man $x = \alpha$ setzt, in die Form $\frac{0}{0}$
übergeht, so ist dies ein Beweis, dass Zähler und Nenner den
gemeinschaftlichen Factor $x - \alpha$ besitzen, so dass man hat
 $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{(x - \alpha) \varphi(x)}{(x - \alpha) \varphi_1(x)}$. Gelingt es, den gemeinschaftlichen Factor
zu entdecken, so hat man, um den wahren Werth von $\frac{f(x)}{F(x)}$ für
 $x = \alpha$ zu erhalten, den gemeinschaftlichen Factor durch Divi-

sion zuerst zu entfernen und darauf $x = \alpha$ zu setzen. So z. B.

wird $\frac{x-\alpha}{x^2-\alpha^2}$ gleich $\frac{0}{0}$, wenn man $x = \alpha$ setzt. Es ist aber

$$\frac{x-\alpha}{x^2-\alpha^2} = \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)(x+\alpha)}.$$

Entfernt man den gemeinschaftlichen

Factor, und setzt man hierauf $x = \alpha$, so findet man $\frac{x-\alpha}{x^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}$.

In einem andern Falle sei gegeben der Bruch $\frac{e^x - e^{-x}}{\sin. x}$. Setzt man

$x=0$, so verschwinden Zähler und Nenner, es wird daher $x=0$ oder x ein gemeinschaftlicher Factor des Zählers und Nenners sein. In der That ist

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots,$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \dots,$$

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \dots,$$

hierdurch wird

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\sin. x} = \frac{2x \left(1 + \frac{x^2}{1.2.3} + \dots \right)}{x \left(1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \dots \right)}.$$

Entfernt man den gemeinschaftlichen Factor x , und setzt man hierauf $x=0$, so erhält man:

$$\frac{e^0 - e^{-0}}{\sin. 0} = \frac{0}{0} = 2$$

Wenn es nicht gelingt den gemeinschaftlichen Factor des Zählers und Nenners gesondert darzustellen, oder wenn dies nur mit vieler Weitläufigkeit geschehen kann, so ist es zweckmässig, sich nach andern Methoden zur Bestimmung des Werthes von $\frac{0}{0}$ umzusehen. Die Differentialrechnung gibt hierzu ein sehr einfaches Mittel. Gesetzt es werde $\frac{f(x)}{F(x)}$ durch $x = \alpha$ gleich $\frac{0}{0}$, so dass man also hat

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{(x-\alpha) \varphi(x)}{(x-\alpha) \varphi_1(x)}$$

Differentirt man Zähler und Nenner in Hinsicht x , so erhält man:

$$\frac{(x-\alpha) \frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x)}{(x-\alpha) \frac{d\varphi_1(x)}{dx} + \varphi_1(x)}$$

Setzt man hierin $x = \alpha$, so verschwindet der erste Theil des Zählers und der erste Theil des Nenners, und der Bruch wird gleich $\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)}$, welches der wahre Werth von $\frac{f(x)}{F(x)}$ für den Fall $x = \alpha$ ist.

Gesetzt es würde $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ durch $x = \alpha$ die Form $\frac{0}{0}$ erhalten, so wäre dies ein Beweis, dass $x = \alpha$ wieder gemeinschaftlicher Factor des Zählers und Nenners ist. Man hat daher von Neuem Zähler und Nenner in Hinsicht x zu differentiren, und darauf $x = \alpha$ zu setzen, und hat überhaupt dieses Verfahren so lange fortzusetzen, bis Zähler und Nenner durch den speciellen Werth von x nicht mehr gleichzeitig verschwinden.

46) Es werden folgende Beispiele zur Erläuterung der eben aufgestellten Lehre dienen.

1tes Beispiel. Man soll den Werth von

$$y = \frac{x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x + a^4}{x^6 - ax^5 - a^2x^4 + a^3x^3}$$

für den Fall $x = a$ bestimmen.

Durch Differentiation des Zählers und Nenners erhält man:

$$\frac{4x^3 - 6ax^2 + 4a^2x - 2a^3}{6x^5 - 5ax^4 - 4a^2x^3 + 3a^3x^2}$$

Durch $x = a$ erhält dieser Bruch die Form $\frac{0}{0}$. Man hat daher von Neuem Zähler und Nenner zu differentiren; man erhält hierdurch

$$\frac{12x^2 - 12ax + 4a^2}{30x^4 - 20ax^3 - 12a^2x^2 + 6a^3x}$$

Setzt man hierin $x = a$, so erhält man $\frac{1}{a^2}$, und dies ist der Werth von y , wenn $x = a$ wird.

2tes Beispiel. Man soll den Werth von $y = \frac{1 - \cos. x}{\sin. x^2}$ für den Fall $x = 0$ bestimmen. Durch Differentiation des Zählers und Nenners erhält man:

$$\frac{\sin. x}{2 \sin. x \cdot \cos. x} = \frac{1}{2 \cos. x}$$

Der Werth dieses Bruches für $x=0$ ist $\frac{1}{2}$, es wird daher $y = \frac{1}{2}$, wenn $x=0$ wird.

3tes Beispiel. Man soll den Werth von $y = \frac{1 - \cos. x}{x^2}$ für den Fall $x=0$ bestimmen.

Man erhält durch Differentiation des Zählers und Nenners:

$$\frac{\sin. x}{2x}$$

Durch $x=0$ erhält dieser Bruch die Form $\frac{0}{0}$. Man hat daher von Neuem zu differentiren, und erhält:

$$\frac{\cos. x}{2}$$

Dieser Bruch wird durch $x=0$, gleich $\frac{1}{2}$. Es wird daher y für den Fall $x=0$ gleich $\frac{1}{2}$.

4tes Beispiel. Man soll den Werth von $y = \frac{x - \sin. x}{x^4}$ für den Fall $x=0$ bestimmen.

Man erhält durch wiederholte Differentiation des Zählers und Nenners nach der Reihe

$$\frac{1 - \cos. x}{4x^3}, \frac{\sin. x}{12x^2}, \frac{\cos. x}{24x}$$

Setzt man in dem letzten dieser Brüche $x=0$, so wird der Zähler gleich 1 und der Nenner gleich Null, daher der Werth des Bruches gleich ∞ . Es wird daher y gleich ∞ , wenn x gleich Null wird.

47) Die im § 46 aufgestellte Regel setzt voraus, dass die Exponenten der gemeinschaftlichen Factoren des Zählers und Nenners ganze Zahlen sind. Ist dies nicht der Fall, so ist auch jene Regel nicht anwendbar. Gesetzt nämlich es wäre:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{(x-\alpha)^{\frac{m}{n}} \varphi(x)}{(x-\alpha)^{\frac{p}{q}} \varphi_1(x)}$$

so würde man durch Differentiation des Zählers und Nenners erhalten:

$$\frac{(x-\alpha)^{\frac{m}{n}} \frac{d\varphi x}{dx} + \frac{m}{n} (x-\alpha)^{\frac{m}{n}-1} \varphi(x)}{(x-\alpha)^{\frac{p}{q}} \frac{d\varphi_1(x)}{dx} + \frac{p}{q} (x-\alpha)^{\frac{p}{q}-1} \varphi_1(x)}$$

Setzt man hierin $x = a$, so verschwindet wieder Zähler und Nenner. Und wenn man auch die Differentiation noch so oft wiederholen würde, so würden, da hier nie ein Exponent von $x - a$ Null werden kann, stets Zähler und Nenner für $x = a$ zugleich verschwinden. Es kann daher auf diesem Wege der wahre Werth von $\frac{f(x)}{F(x)}$ für $x = a$ nicht ermittelt werden. Dagegen führt die directe Entwicklung in Reihen zum Ziele. Setzt man nämlich $a + h$ statt x , und entwickelt man Zähler und Nenner von $\frac{f(a+h)}{F(a+h)}$ nach steigenden Potenzen von h in Reihen, so erhält man im Allgemeinen

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)}{F(a+h)} &= \frac{Ah^m + Bh^n + \dots}{Mh^p + Nh^q + \dots} \\ &= h^{m-p} \frac{A + Bh^{n-m} + \dots}{M + Nh^{q-p} + \dots}\end{aligned}$$

Hier sind drei Fälle zu unterscheiden, nämlich 1) $m = p$ 2) $m < p$ und 3) $m > p$. Wenn $m = p$ ist, so wird $h^{m-p} = 1$, daher:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{A + Bh^{n-m} + \dots}{M + Nh^{q-p} + \dots}$$

Setzt man hierin $h=0$, so erhält man:

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{A}{M},$$

welches der Werth von $\frac{f(x)}{F(x)}$ für $x = a$ ist.

Wenn $m < p$, so ist $m - p$ negativ, und es wird, wenn man $h=0$ setzt,

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \infty.$$

Wenn $m > p$, so ist $m - p$ positiv, und es wird, wenn man $h=0$ setzt

$$\frac{f(a)}{F(a)} = 0.$$

Beispiel. Man soll den Werth von $y = \frac{a - (2x^5 - a^5)^{\frac{1}{5}}}{(x^3 - a^3)^{\frac{1}{3}}}$ für den Fall $x = a$ bestimmen.

Setzt man $a+h$ statt x , und entwickelt man hierauf Zähler und Nenner nach steigenden Potenzen von h , so erhält man:

$$\frac{a - \left(2(a+h)^5 - a^5\right)^{\frac{1}{5}}}{\left((a+h)^3 - a^3\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2h + 4\frac{h^2}{a} + \dots}{\left(3a^2h + 3ah^2 + h^3\right)^{\frac{1}{3}}} \\ = h^{\frac{2}{3}} \frac{2 + 4\frac{h}{a} + \dots}{\left(3a^2 + 3ah + h^2\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

Dieser Ausdruck wird Null, wenn man h gleich Null setzt. Es wird daher $y=0$ wenn x gleich a wird.

48) Wenn ein Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ durch einen speciellen Werth von x die Form $\frac{\infty}{\infty}$ erhält, so sind zur Ermittlung des wahren Werthes dieser unbestimmten Form die in den vorhergehenden § angegebenen Regeln genügend. Denn es ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{F(x)} : \frac{1}{f(x)} = \frac{0}{0}.$$

Differentirt man Zähler und Nenner des Bruches $\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$, so erhält man:

$$\frac{-\frac{1}{[F(x)]^2} \cdot \frac{dF(x)}{dx}}{-\frac{1}{[f(x)]^2} \cdot \frac{df(x)}{dx}} = \frac{[f(x)]^2 \cdot \frac{dF(x)}{dx}}{[F(x)]^2 \cdot \frac{df(x)}{dx}}.$$

Der Werth dieses Bruches ist derselbe, wie jener des Bruches $\frac{f(x)}{F(x)}$, wenn für x jener Werth gesetzt wird, durch welchen $f(x)$ und $F(x)$ unendlich werden. Man hat daher für diesen speciellen Werth von x

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{[f(x)]^2 \cdot \frac{dF(x)}{dx}}{[F(x)]^2 \cdot \frac{df(x)}{dx}}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{df(x)}{dx}}{\frac{dF(x)}{dx}}.$$

Es ist daher zur Bestimmung des wahren Werthes von $\frac{f(x)}{F(x)}$, wenn durch einen speciellen Werth von x dieser Bruch in die Form $\frac{\infty}{\infty}$ übergehen sollte, ganz dieselbe Regel, wie in § 45 in Anwendung zu bringen.

Beispiel. Man soll den Werth von $y = \frac{\lg. \left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{cosec.} x}$ für den Fall $x = 0$ bestimmen. — Durch Differentiation des Zählers und Nenners erhält man:

$$\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{\cos. x}{\sin. x^2}} = \frac{\sin. x^2}{x \cos. x}$$

Setzt man hier $x=0$, so verschwinden Zähler und Nenner. Man hat daher von Neuem zu differentiren und erhält:

$$\frac{2 \sin. x \cos. x}{\cos. x - x \sin. x}$$

Setzt man hierin $x = 0$, so erhält man $\frac{0}{1} = 0$. Es wird daher $y=0$, wenn $x=0$ wird.

49) Wenn das Produkt $f(x) \cdot F(x)$ durch einen speciellen Werth von x die Form $0 \cdot \infty$ erhält, so kann auch in diesem Falle nach der bisher befolgten Methode der wahre Werth dieser unbestimmten Form ermittelt werden. Denn es ist

$$f(x) \cdot F(x) = f(x) : \frac{1}{F(x)}$$

und man hat, wenn $f(x)$ Null und zugleich $F(x)$ unendlich wird,

$$f(x) : \frac{1}{F(x)} = \frac{0}{\infty}$$

Wenn ferner in dem Ausdruck $\frac{f(x)}{F(x)} - \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ die Functionen $F(x)$ und $\varphi_1(x)$ durch einen speciellen Werth von x Null werden, so dass man hat $\frac{f(x)}{F(x)} - \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = \infty - \infty$, so kann auch der Werth dieser unbestimmten Form, nach den früheren Regeln ermittelt werden. Denn es ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} - \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{f(x) \cdot \varphi_1(x) - F(x) \cdot \varphi(x)}{F(x) \cdot \varphi_1(x)},$$

welcher Bruch die Form $\frac{0}{0}$ erhält, wenn $F(x)$ und $\varphi_1(x)$ Null werden.

Beispiel. Man soll den Werth von $y = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin. x}$ für den Fall von $x=0$ bestimmen.

$$\text{Es ist : } \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin. x} = \frac{\sin. x - x^3}{x^3 \cdot \sin. x}.$$

Durch Differentiation des Zählers und Nenners erhält man:

$$\frac{\cos. x - 3x^2}{3x^2 \sin. x + x^3 \cos. x}.$$

Setzt man hierin $x=0$, so erhält man $\frac{1}{0} = \infty$. Es wird daher $y = \infty$, wenn $x=0$ wird.

50) Es gibt noch einige andere unbestimmte Formen wie 0^0 , ∞^0 , 1^∞ , $\sqrt[\infty]{\infty}$ u. s. w., in welche Functionen einer Veränderlichen durch specielle Werthe der Veränderlichen übertreten. Es können aber alle diese Formen auf die in den früheren §§. untersuchten zurückgebracht werden. Gesetzt nämlich es sei $v=y^z$, wo y und z Functionen von x sind, so hat man auch

$$\begin{aligned} \lg. v &= z \lg. y, \\ \text{daher} \quad v &= e^{z \lg. y}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck erhält in drei Fällen eine unbestimmte Form, nämlich wenn,

$$\begin{aligned} z &= 0 \text{ und } y = 0, \\ z &= 0 \text{ und } y = \infty, \\ z &= \infty \text{ und } y = 1. \end{aligned}$$

und diese Fälle entsprechen den Formen 0^0 , ∞^0 , 1^∞ .

Wäre in einem anderen Falle $v = \sqrt[z]{y}$, so hätte man auch

$$\lg. v = \frac{1}{z} \lg. y,$$

$$\text{daher} \quad v = e^{\frac{\lg. y}{z}}.$$

Dieser Ausdruck wird in folgenden Fällen zu einer unbestimmten Form führen, nämlich wenn:

$$\begin{aligned} z &= 0 \text{ und } y = 1, \\ z &= \infty \text{ und } y = 0, \\ z &= \infty \text{ und } y = \infty. \end{aligned}$$

Diese Fälle entsprechen den unbestimmten Formen $\sqrt[0]{1}$, $\sqrt[\infty]{0}$, $\sqrt[\infty]{\infty}$.

1tes Beispiel. Man soll den Werth von $v = x^x$ für den Fall $x=0$ bestimmen.

Es ist $\lg. v = x \lg. x$, daher $v = e^{x \lg. x}$. Es ist ferner $x \lg. x = \frac{\lg. x}{\frac{1}{x}}$. Differentirt man Zähler und Nenner, so erhält man:

$$\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x$$

Es wird daher $x \lg. x$ Null, wenn x Null wird; und v wird daher $= e^0 = 1$, wenn $x=0$ wird.

2tes Beispiel. Man soll den Werth von $v = (\sin. x)^{\frac{1}{\cos. x}}$ für den Fall $x = \frac{\pi}{2}$ bestimmen.

Es ist $\lg. v = \frac{1}{\cos. x} \cdot \lg. \sin. x$, daher $v = e^{\frac{\lg. \sin. x}{\cos. x}}$. Der Bruch $\frac{\lg. \sin. x}{\cos. x}$ erhält durch $x = \frac{\pi}{2}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Differen-

tirt man Zähler und Nenner, so erhält man $-\frac{\cos. x}{\sin. x^2}$; es wird

daher der Bruch $\frac{\lg. \sin. x}{\cos. x}$ gleich Null, wenn $x = \frac{\pi}{2}$ wird, und v

wird gleich $e^0 = 1$, wenn $x = \frac{\pi}{2}$ wird.

51) Es kann endlich eintreten, dass eine Function zweier veränderlichen Grössen durch specielle Werthe der Variabeln in einer unbestimmten Form erscheint. Sind die beiden Veränderlichen unabhängig von einander, so schliesst sich die Ermittlung des wahren Werthes der unbestimmten Form ganz an das bisherige Verfahren an. Gesetzt es sei $\frac{f(x,y)}{F(x,y)}$ der Ausdruck, welcher durch $x=a$ und $y=b$ in einer unbestimmten Form erscheint. Setzt man $x=a$, so hat man $\frac{f(a,y)}{F(a,y)}$. Da dieser Ausdruck durch $y=b$ in die Form $\frac{0}{0}$ übergehen soll, so hat man nur Zähler und Nenner in Hinsicht y zu differentiren und darauf $y=b$ zu setzen, um den wahren Werth von $\frac{f(a,b)}{F(a,b)}$ zu erhalten.

Wenn die beiden Veränderlichen durch eine Gleichung verbunden sind, so dass man hat $\frac{f(x,y)}{F(x,y)}$ und $\varphi(x,y)=0$, und wenn durch specielle Werthe von x und y $\frac{f(x,y)}{F(x,y)}$ eine unbestimmte Form erhält, so können zur Bestimmung des wahren Werthes der unbestimmten Form zwei Wege eingeschlagen werden. Man kann entweder aus der Gleichung $\varphi(x,y)=0$ die Variable y durch x ausdrücken und den Werth von y , den man erhält in $\frac{f(x,y)}{F(x,y)}$ einführen, und dann wie früher verfahren, oder man kann Zähler und Nenner des Bruches $\frac{f(x,y)}{F(x,y)}$ in Hinsicht x differentiren, und hierin den Werth von $\frac{dy}{dx}$, den man durch Differentiation der Gleichung $\varphi(x,y)=0$ erhält, einführen. Das letztere Verfahren ist häufig das einfachere. — Man erhält, wenn man Zähler und Nenner des Bruches $\frac{f(x,y)}{F(x,y)}$ differentirt, und dabei y als eine Function von x betrachtet :

$$\frac{\frac{df(x,y)}{dx} + \frac{df(x,y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}}{\frac{dF(x,y)}{dx} + \frac{dF(x,y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}}.$$

Aus der Gleichung $\varphi(x,y)=0$ erhält man durch Differentiation:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{d\varphi(x,y)}{dx}}{\frac{d\varphi(x,y)}{dy}}.$$

Führt man diesen Werth von $\frac{dy}{dx}$ in dem früheren Ausdruck ein, so erhält man:

$$\alpha) \frac{\frac{df(x,y)}{dx} \cdot \frac{d\varphi(x,y)}{dy} - \frac{df(x,y)}{dy} \cdot \frac{d\varphi(x,y)}{dx}}{\frac{dF(x,y)}{dx} \cdot \frac{d\varphi(x,y)}{dy} - \frac{dF(x,y)}{dy} \cdot \frac{d\varphi(x,y)}{dx}}.$$

Hierin sind die Werthe von x und y einzuführen, durch welche $\frac{f(x,y)}{F(x,y)}$ eine unbestimmte Form erhalten würde. Würde man

hierdurch wieder einen Ausdruck von der Form $\frac{0}{0}$ erhalten, so müssten von Neuem Zähler und Nenner differentirt werden u. s. w.

Beispiel. Es ist gegeben die Gleichung $x^3 - a^3 + 2xy + y^2 + a^2 = 0$. Man soll den Werth von $\frac{x^2 - a^2 + ay + y^2}{x^3 - a^3 + y + a}$ für den Fall $x = a$ und $y = -a$ bestimmen.

Es ist:

$$f(x, y) = x^2 - a^2 + ay + y^2,$$

$$\text{daher: } \frac{df(x, y)}{dx} = 2x \text{ und } \frac{df(x, y)}{dy} = a + 2y,$$

$$F(x, y) = x^3 - a^3 + y + a,$$

$$\text{daher: } \frac{dF(x, y)}{dx} = 3x^2 \text{ und } \frac{dF(x, y)}{dy} = 1,$$

$$\varphi(x, y) = x^3 - a^3 + 2xy + y^2 + a^2,$$

$$\text{daher: } \frac{d\varphi(x, y)}{dx} = 3x^2 + 2y \text{ und } \frac{d\varphi(x, y)}{dy} = 2x + 2y.$$

Führt man diese Werthe in der Formel α ein so erhält man:

$$\frac{2x(2x + 2y) - (a + 2y)(3x^2 + 2y)}{3x^2(2x + 2y) - (3x^2 + 2y)}.$$

Setzt man hierin $x = a$ und $y = -a$, so erhält man $-a$. Es wird daher $\frac{x^2 - a^2 + ay + y^2}{x^3 - a^3 + y + a}$ durch $x = a$ und $y = -a$ gleich $-a$.

52) Wenn der Werth von $\frac{dy}{dx}$, der durch Differentiation einer Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ erhalten wird, durch specielle Werthe von x und y die Form $\frac{0}{0}$ erhält, so ist eine wiederholte Differentiation erforderlich, um den Werth von $\frac{0}{0}$ zu ermitteln. Durch die erste Differentiation der gegebenen Gleichung erhält man:

$$\alpha) \frac{d\varphi(x, y)}{dx} + \frac{d\varphi(x, y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Differentirt man von Neuem in Hinsicht x , so erhält man:

$$\beta) \frac{d^2\varphi(x, y)}{dx^2} + 2 \frac{d^2\varphi(x, y)}{dx \cdot dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2\varphi(x, y)}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d\varphi(x, y)}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Nach der Voraussetzung sollen $\frac{d\varphi(x,y)}{dx}$ und $\frac{d\varphi(x,y)}{dy}$ durch specielle Werthe von x und y Null werden, wodurch eben der Werth von $\frac{dy}{dx}$, der aus der Gleichung α erhalten wird, in die Form $\frac{0}{0}$ übergeht. Berücksichtigt man in der Gleichung β , dass $\frac{d\varphi(x,y)}{dy}$ durch jene Werthe von x und y Null wird, für welche der Werth von $\frac{dy}{dx}$ bestimmt werden soll, so fällt das letzte Glied der Gleichung β weg, und man erhält:

$$\frac{d^2\varphi(x,y)}{dx^2} + 2 \frac{d^2\varphi(x,y)}{dx \cdot dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2\varphi(x,y)}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

aus welcher Gleichung der Werth von $\frac{dy}{dx}$ bestimmt werden kann. Sollte man auch hierdurch die speciellen Werthe von x und y die Form $\frac{dy}{dx}$ erhalten, so müsste man die Gleichung β von Neuem differentiren u. s. w.

Beispiel. Es ist gegeben die Gleichung $y^3 + 4y^2 + 3x^3 - x^2 = 0$. Durch Differentiation erhält man:

$$(3y^2 + 8y) \frac{dy}{dx} + (9x^2 - 2x) = 0$$

hieraus folgt: $\frac{dy}{dx} = -\frac{9x^2 - 2x}{3y^2 + 8y}$.

Aus der vorgelegten Gleichung folgt, dass x und y zugleich Null werden; man erkennt aber dass, wenn $x=y=0$ wird, $\frac{dy}{dx}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ erhält.

Differentirt man von Neuem, und berücksichtigt man dass durch $y=0$ auch $3y^2 + 8y$ Null wird, so findet man:

$$(6y + 8) \frac{dy^2}{dx^2} + (18x - 2) = 0.$$

Hieraus folgt: $\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{2 - 18x}{8 + 6y}}$.

Es wird daher für $x=y=0$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{2}$$

53) Die Bestimmung der wahren Werthe der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, in welche gebrochene Functionen durch specielle Werthe der Veränderlichen übergehen, rührt von Joh. Bernoulli her. Es waren geometrische Probleme, welche ihn zu Untersuchungen dieser Art führten, und ebenso hat später l'Hôpital in seinem schon angeführten Werke *Analyse des infiniment petits*. Sect. IX die Methode Bernoulli's gestützt auf geometrische Betrachtungen vorgetragen. Lagrange hat denselben Gegenstand in seinem *Calcul des Fonctions* leçon VIII rein analytisch behandelt und zugleich die Fälle bezeichnet, in welchen zur Bestimmung des Werthes von $\frac{0}{0}$ die directe Reihenentwicklung anzuwenden ist. Endlich sind in Cauchy's Vorlesungen über Differentialrechnung die unbestimmten Formen 0^0 , ∞^0 , 1^∞ , u. s. w. näher untersucht.

Siebenter Abschnitt.

Ueber die verschiedenen Methoden der Begründung der Differentialrechnung.

54) Die verschiedenen Methoden der Begründung der Differentialrechnung haben theils ein wissenschaftliches Interesse, indem sie, abgesehen davon, dass ein Gegenstand von verschiedenen Seiten aufgefasst, klarer hervortritt, zu den wichtigsten Untersuchungen über die Natur der Functionen und der Reihenentwicklung Veranlassung gaben, theils haben sie ein praktisches Interesse, indem in den Anwendungen der Differentialrechnung auf Geometrie und Mechanik bald die eine bald die andere Betrachtungsweise rascher zum Ziele führt.

55) Methode des unendlich Kleinen. Leibnitz und nach ihm die beiden Bernoulli, l'Hôpital u. a. haben die Differentialrechnung auf die Erwägung des unendlich kleinen gegründet. Man muss zugestehen, dass diese Methode, wie wenig sie auch geeignet sein mag die Principien der Differentialrechnung klar

hervortreten zu lassen, in den Untersuchungen der Geometrie und Mechanik ausnehmend fördernd ist und dass sie namentlich in Bezug auf Kürze der Darstellung einen besonderen Vorzug besitzt. — Zu ihrer näheren Begründung werden hier folgende Sätze voran gestellt.

1) Eine ohne Ende wachsende Grösse wird unendlich gross. Es wird dieselbe bekanntlich bezeichnet durch ∞ , wobei ausdrücklich zu bemerken ist, dass hiemit nicht eine unendlich gross seiende sondern eine unendlich gross werdende Grösse, oder eine Grösse, die grösser wird, wie jede angebbare Grösse, bezeichnet ist. Es geht hieraus von selbst hervor, dass, wenn man zu ∞ eine endliche Grösse addirt, oder von ∞ eine endliche Grösse subtrahirt, nichts an dem Zustand von ∞ geändert wird, oder dass man hat $\infty \pm a = \infty$.

2) Eine ohne Ende abnehmende Grösse wird unendlich klein oder verschwindend klein. Man nennt eine solche Grösse ein unendlich Kleines. — Ein Bruch, dessen Zähler eine endliche Grösse und dessen Nenner eine unendlich gross werdende Grösse ist, drückt eine unendlich klein werdende Grösse aus. Ebenso drückt der Unterschied $2 - x$, wenn x unendlich sich der Zahl 2 nähert, eine unendlich klein werdende Grösse aus.

3) Eine unendlich klein werdende Grösse verschwindet gegen jede endliche Grösse, so dass man hat $\frac{a}{\infty} \pm b = \pm b$.

4) Das Produkt aus einer unendlich klein werdenden Grösse in eine endliche Grösse ist eine unendlich klein werdende Grösse. Denn sind a und b endliche Grössen und ist $a \cdot b = c$, so ist $\frac{a}{\infty} \cdot b = \frac{c}{\infty}$.

5) Der Quotient zweier unendlich klein werdender Grössen ist so lange unbestimmt als man den Gang dieser Grössen nicht kennt. Da der Gang der unendlich klein werdenden Grössen unendlich verschieden sein kann, so ist auch ein Gleiches bei dem Quotienten dieser Grössen der Fall. Sind $\frac{a}{\infty}$ und $\frac{b}{\infty}$ die unendlich klein werdenden Grössen, so ist

$$\frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty} = a : b.$$

Sind in einem andern Falle $\frac{m}{\infty}$ und $\frac{n}{\infty}$ die unendlich klein werdenden Grössen, so ist

$$\frac{m}{\infty} : \frac{n}{\infty} = m : n.$$

6) Ein unendlich Kleines multiplicirt mit einem unendlich Kleinen wird ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung genannt. Ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung ist verschwindend klein gegen ein unendlich Kleines der ersten Ordnung. Denn gesetzt es seien $\frac{a}{\infty}$ und $\frac{b}{\infty}$ zwei unendlich klein werdende Grössen, so hat man:

$$\frac{a}{\infty} : \frac{a}{\infty} \cdot \frac{b}{\infty} = 1 : \frac{b}{\infty}.$$

Da das vierte Glied verschwindend klein gegen das dritte ist, so ist auch das zweite Glied verschwindend klein gegen das erste. — Es lässt sich leicht übersehen, was unter einem unendlich Kleinen der dritten, vierten oder einer höheren Ordnung zu verstehen ist, und ebenso dass ein unendlich Kleines einer höheren Ordnung verschwindet gegen ein unendlich Kleines einer niederen Ordnung.

56) Die Anwendung der eben angeführten Sätze zur Bestimmung der Differentialien der Functionen ergibt sich wie folgt. Die Differenz von $f(x)$ ist $f(x+h) - f(x)$. Das Differential erhält man, wenn man für h die verschwindend kleine Zunahme von x , die durch dx bezeichnet wird, setzt, d. h. es ist

$$df(x) = f(x + dx) - f(x).$$

Entwickelt man $f(x + dx)$ in eine Reihe geordnet nach steigenden Potenzen von x , so hat man im Allgemeinen:

$$f(x + dx) = f(x) + A dx + A_1 dx^2 + A_2 dx^3 + \dots,$$

hierdurch wird

$$df(x) = A dx + A_1 dx^2 + A_2 dx^3 + \dots$$

Da aber die Differentialien der zweiten, dritten u. s. w. Ordnung, indem überhaupt ein Differential als eine verschwindend kleine Grösse betrachtet wird, gegen das Differential der ersten Ordnung verschwinden, so erhält man:

$$df(x) = A dx.$$

Wendet man dieses Verfahren auf die einfachen algebraischen Functionen:

$$m + x, m - x, mx, \frac{m}{x}, x^m$$

und auf die einfachen transcendenten Functionen:

$$a^x, \lg.(x), \sin. x, \cos. x$$

nach der Reihe an, so erhält man die Differentialien der genannten Functionen. Man findet nämlich:

$$d(m + x) = (m + x + dx) - (m + x) = dx,$$

$$d(m - x) = (m - x + dx) - (m - x) = -dx,$$

$$d mx = m(x + dx) - mx = m dx,$$

$$d \frac{m}{x} = \frac{m}{x + dx} - \frac{m}{x} = \left(\frac{m}{x} - \frac{m}{x^2} dx + \frac{m}{x^3} dx^2 - \dots \right) - \frac{m}{x} = -\frac{m}{x^2} dx,$$

$$d x^m = (x + dx)^m - x^m = \left(x^m + m x^{m-1} dx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} dx^2 + \dots \right) - x^m = m x^{m-1} dx.$$

Ferner:

$$d a^x = a^{x+dx} - a^x = a^x (a^{dx} - 1).$$

Entwickelt man hierin a^{dx} nach der Gleichung No. 8. in eine Reihe, so erhält man:

$$d a^x = a^x \left(1 + \log. a dx + (\log. a)^2 \cdot \frac{dx^2}{1 \cdot 2} + \dots - 1 \right) = a^x \log. a dx.$$

Ferner ist:

$$d \log. x = \log. (x + dx) - \log. (x) = \log. \left(1 + \frac{dx}{x} \right).$$

Entwickelt man $\log. \left(1 + \frac{dx}{x} \right)$ nach der Gleichung No. 7. in eine Reihe, so erhält man:

$$d \log. x = \frac{dx}{x} - \left(\frac{dx}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{dx}{x} \right)^3 \cdot \frac{1}{3} - \dots = \frac{dx}{x}.$$

Zur Bestimmung der Differentialien der Kreisfunctionen hat man:

$$\begin{aligned} d \sin. x &= \sin. (x + dx) - \sin. x \\ &= \sin. x \cdot \cos. dx + \cos. x \cdot \sin. dx - \sin. x. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, dass der Cosinus eines verschwindend kleinen Bogens gleich der Einheit, und der Sinus eines solchen

Bogens gleich dem Bogen ist, so hat man $\cos. dx = 1$, $\sin. dx = dx$, daher:

$$d \sin. x = \cos. x \cdot dx.$$

Ebenso findet man:

$$\begin{aligned} d \cos. x &= \cos. (x + dx) - \cos. x \\ &= \cos. x \cdot \cos. dx - \sin. x \cdot \sin. dx - \cos. x \\ &= - \sin. x dx. \end{aligned}$$

57) Auf ähnliche Weise wird verfahren, wenn das Differential eines Produktes oder eines Quotienten zweier Functionen bestimmt werden soll. Gesetzt es seien y und z Functionen von x , und es soll das Differential des Produktes $y \cdot z$ bestimmt werden. Nimmt x um dx zu, so nehmen y und z um dy und dz zu; man hat hiernach

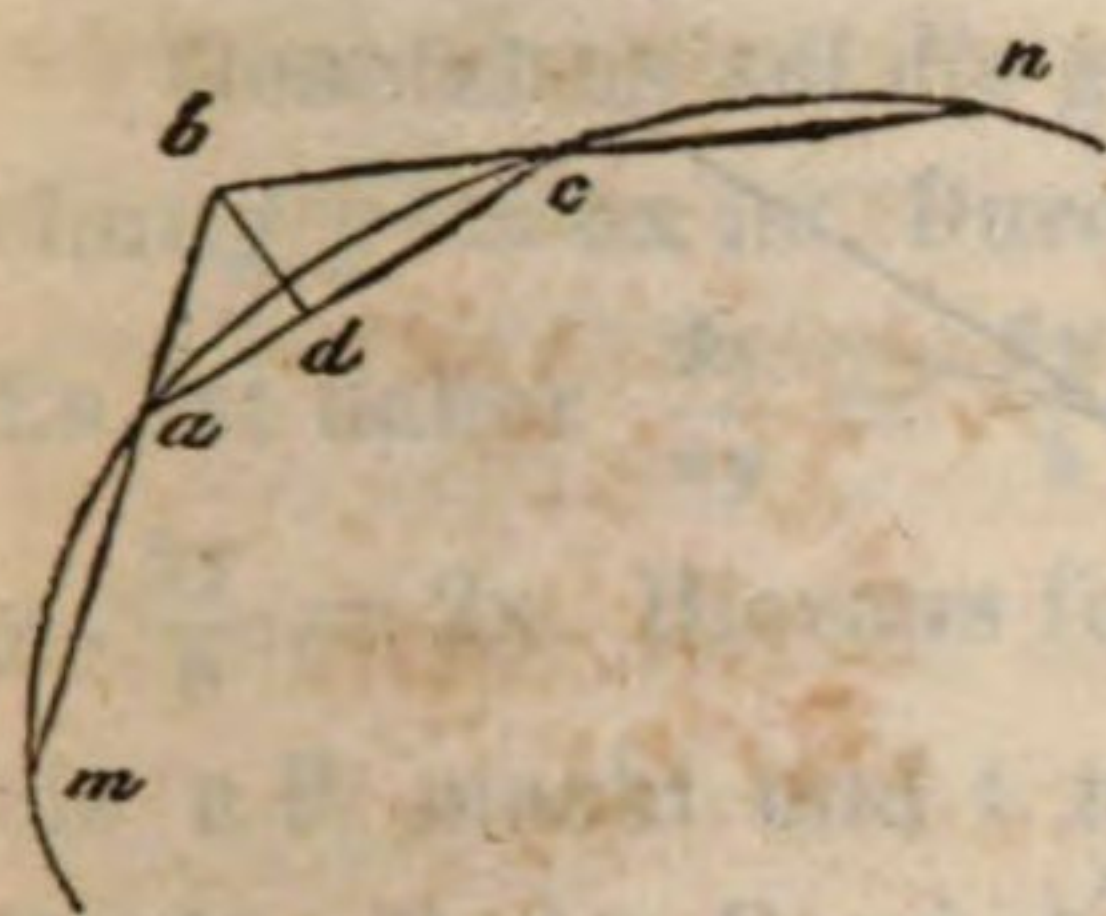
$$\begin{aligned} d(y \cdot z) &= (y + dy)(z + dz) - y \cdot z \\ &= yz + z dy + y dz + dy dz - y \cdot z. \end{aligned}$$

Da aber $dy \cdot dz$ ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung ist, welches daher gegen ein unendlich Kleines der ersten Ordnung verschwindet, so hat man

$$d(y \cdot z) = z dy + y dz.$$

Es genügt das Bisherige, um zu verstehen auf welche Weise die Differentiation der Functionen mehrerer veränderlicher Grössen so wie die Differentialien höherer Ordnungen erhalten werden.

58) Die Methode des unendlich Kleinen gewährt in den Untersuchungen der krummen Linien grosse Erleichterungen, zugleich waren es Untersuchungen dieser Art, welche zur Erfindung dieser Methode hinführten. — Man betrachtet nach derselben die krummen Linien als Polygone von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten. Man setzt hiermit voraus, dass die Sehne und das entsprechende Bogenelement einer Curve einander gleich sind oder zu einander im Verhältniss der Einheit stehen. Dies lässt sich in der That auf folgende Weise näher begründen.



Es sei ac die unendlich kleine Seite einer Curve oder die Sehne eines Curvelementes, am und cn seien die Sehnen der benachbarten Curvelemente. — Kann man beweisen, dass die Sehne ac und die gebrochene Linie abc im Verhältniss der Einheit stehen, oder nur um ein unendlich Kleines einer höheren Ordnung verschieden sind, so wird dies um so mehr für das Verhältniss der Sehne ac zum Bogen ac der Fall sein, indem derselbe zwischen die gebrochene Linie und Sehne fällt.

Zieht man von b eine Linie bd senkrecht zu ac , so hat man:

$$ac = ad + dc = ab \cdot \cos. bad + bc \cdot \cos. bcd.$$

Diese Gleichung geht, wenn man berücksichtigt dass $\cos. bad = 1 - 2 \left(\sin. \frac{bad}{2} \right)^2$ und $\cos. bcd = 1 - 2 \left(\sin. \frac{bcd}{2} \right)^2$ ist, in folgende über:

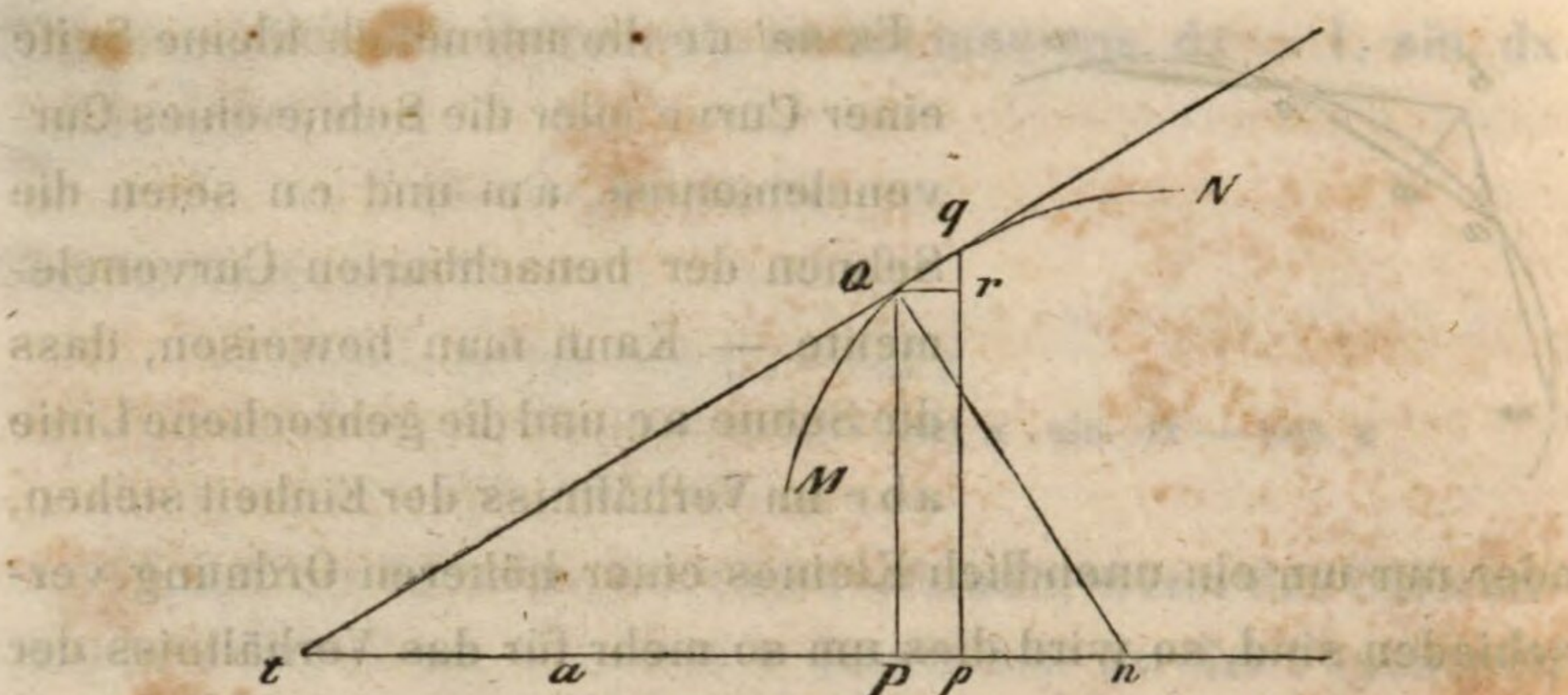
$$ac = ab + bc - 2ab \left(\sin. \frac{bad}{2} \right)^2 - 2bc \left(\sin. \frac{bcd}{2} \right)^2.$$

Hieraus erhält man:

$$\frac{ac}{ab + bc} = 1 - 2 \frac{ab}{ab + bc} \cdot \left(\sin. \frac{bad}{2} \right)^2 - 2 \frac{bc}{ab + bc} \left(\sin. \frac{bcd}{2} \right)^2.$$

Die Brüche $\frac{ab}{ab + bc}$, $\frac{bc}{ab + bc}$ sind ächte Brüche, es können daher die Coefficienten $2 \cdot \frac{ab}{ab + bc}$, $2 \cdot \frac{bc}{ab + bc}$ nicht unendlich gross sein. Die Winkel bad und bcd sind verschwindend klein, indem die Nebenwinkel derselben cam und acn nur unendlich wenig von 180° verschieden sind. Es sind daher $\left(\sin. \frac{bad}{2} \right)^2$, $\left(\sin. \frac{bcd}{2} \right)^2$ unendlich kleine Grössen der zweiten Ordnung, die gegen die endliche Grösse 1 vernachlässiget werden können. Man hat daher $\frac{ac}{ab + bc} = 1$ oder $ac = ab + bc$.

59) Eine der ersten Anwendungen, welche von dieser Betrachtungsweise der krummen Linien gemacht wurde, war die zur Bestimmung der Tangenten derselben.



Es sei MN eine Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ gegeben ist. $aP = x$, $PQ = y$ seien die Ordinalen eines Punktes Q der Curve. Lässt man x um eine unendlich kleine Grösse $Pp = dx$ zunehmen, so wird auch y um ein unendlich Kleines $qr = dy$ zunehmen, und Qq ist eine der unendlich kleinen Seiten der Curve MN . Die Verlängerung Qt von Qq ist die Tangente am Punkte Q .

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke tPQ , Qrq folgt

$$tP : PQ = Qr : rq,$$

es ist aber $PQ = y$, $Qr = dx$, $rq = dy$, daher

$$tP : y = dx : dy.$$

Hieraus erhält man die Subtangente

$$tP = y \cdot \frac{dx}{dy}.$$

Zieht man Qn senkrecht zu tQ , so entsteht das rechtwinkelige Dreieck PQn , welches ähnlich ist dem Dreieck tQP . Hieraus folgt die Subnormale

$$Pn = \frac{PQ^2}{tP} = y \frac{dy}{dx}.$$

Zur Bestimmung der Tangente tQ hat man.

$$tQ = \sqrt{tP^2 + PQ^2} = y \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}},$$

und für die Normale Qn hat man:

$$Qn = \sqrt{Pn^2 + PQ^2} = y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Gesetzt es sei die gegebene Curve eine Parabel, deren Gleichung $y^2 = bx$ ist. Durch Differentiation erhält man $2y \, dy = b \, dx$. Es ist daher $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{b}$, und die Subtangente tP wird gleich $y \cdot \frac{2y}{b} = 2x$. Hieraus folgt, dass, wenn man tP doppelt so gross als aP macht und t mit Q verbindet, tQ eine Tangente am Punkte Q der Parabel ist.

Die Gleichung der cubischen Parabel ist $y^3 = bx^2$. Man findet für die Subtangente derselben $\frac{3}{2}x$.

60) Methode der Fluxionen. Newton hat die Differentialrechnung auf einem ganz andern Wege begründet. Er betrachtet alle Grössen als erzeugt durch Bewegung; eine grössere oder kleinere Geschwindigkeit erzeugt eine grössere oder kleinere Grösse. Die veränderlichen Grössen nennt er Fluents (Flliessende). Wächst eine solche Fluente mit einer bestimmten Geschwindigkeit, so wird auch jede Function derselben eine entsprechende Aenderung erfahren, sie wird mit einer Geschwindigkeit wachsen, die von der Geschwindigkeit der Zunahme der Fluents und von der Natur der gegebenen Function abhängt. Die Geschwindigkeiten, mit welchen die Fluents und die Functionen der Fluents wachsen heissen Fluxionen; die Bestimmung derselben ist der Gegenstand der Fluxionenrechnung. Dem Wesen nach stimmt die Fluxionenrechnung ganz mit der Differentialrechnung überein, denn die Fluxionen sind, wie so gleich eine nähere Erörterung zeigen wird, nichts anderes als Differentialien; sie unterscheidet sich nur durch die Auffassungsweise der Fundamente, und giebt in dieser Beziehung, wenn man die Aufnahme mechanischer Betrachtungen in analytische Untersuchungen zulässt, allerdings eine präcisere Begründung der Differentialrechnung, als dies unter Zugrundlegung des unbestimmten Begriffes des unendlich Kleinen erreicht werden kann.

Bezeichnet dx die Geschwindigkeit, mit welcher die Veränderliche x wächst, und bezeichnet h ein so kleines Zeittheilchen, dass innerhalb desselben die Geschwindigkeit von x

als gleichförmig angenommen werden kann, so drückt $h dx$ die Zunahme von x für die Zeit h aus. Ebenso drückt $h dy$ die Zunahme von y aus, wenn dy die Geschwindigkeit des Wachsens der Grösse y bezeichnet.

In der Gleichung $y = x^2$ wachse x mit der Geschwindigkeit dx , und die entsprechende Geschwindigkeit von y sei dy . Die Zunahme von y in der Zeit h ist $h \cdot dy$, und die Zunahme von x^2 ist $(x + h \cdot dx)^2 - x^2$. Es ist daher

$$h \cdot dy = (x + h \cdot dx)^2 - x^2 = 2 x h \cdot dx + h^2 dx^2.$$

Dividirt man durch h , so erhält man: $dy = 2x dx + h dx^2$. Setzt man h gleich einer verschwindend kleinen Grösse oder gleich Null, so findet man

$$dy = 2x dx.$$

Es sei Allgemein $y = f(x)$, und dy bezeichne die Geschwindigkeit, mit welcher y wächst, während x mit der Geschwindigkeit dx zunimmt. Die Zunahme von y in der verschwindend kleinen Zeit h ist $h dy$, und die von $f(x)$ ist $f(x + h dx) - f(x)$ es ist daher

$$h dy = f(x + h \cdot dx) - f(x).$$

Es ist aber:

$$f(x + h dx) = f(x) + A_1 h dx + A_2 h^2 dx^2 + \dots$$

daher:

$$h dy = A_1 h dx + A_2 h^2 dx^2 + \dots$$

Dividirt man durch h , und setzt man hierauf h gleich Null, so findet man:

$$dy = A_1 dx.$$

Hieraus folgt $\frac{dy}{dx} = A_1$. Es drückt daher A_1 das Verhältniss der im ersten Augenblick des Wachsens vorhandenen Geschwindigkeiten der Grössen y und x aus.

61) Methode von Euler. Euler hat zuerst den Algorithmus der Differentialrechnung mit mathematischer Schärfe und ohne sich an Betrachtungen anzulehnen, die der Analysis fremd sind, hervorgehoben. Er zeigt, dass das Differential einer Veränderlichen oder einer Function einer Veränderlichen ein specieller Fall der Differenz derselben ist, und zwar jener Fall, in welchem die Zunahme der Veränderlichen Null wird. Die Diffe-

renz wird hierdurch selbst gleich Null, und die Differentialien sind daher an und für sich Nulle. So wie nun $\frac{0}{0}$ ein unbestimmter Ausdruck ist, der unzählig viele Werthe bezeichnen kann, dessen wahrer und einziger Werth aber sogleich erkannt wird, sobald man weiss, aus welchem Grunde Zähler und Nenner verschwunden oder Null geworden sind, so wird auch $\frac{df(x)}{dx}$, welches in der That $\frac{0}{0}$ ist, einen bestimmten angebbaren Werth besitzen, indem der Grund, aus welchem Zähler und Nenner verschwunden sind, bekannt ist, nämlich darin besteht, dass in der Differenz der Function und in der Differenz der Grundgrösse die Zunahme der Variabeln Null gesetzt wurde. Wenn z. B. h die Zunahme der Veränderlichen x der Function x^3 bezeichnet, so ist $(x+h)^3 - x^3$ die Differenz von x^3 , und $x+h-x$ oder h ist die Differenz von x ; das Verhältniss dieser Differenzen ist
$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$
 Wird h Null, so wird $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ gleich $\frac{0}{0}$; die Entwicklung der Differenz zeigt aber, dass in diesem Falle $\frac{0}{0}$ oder $\frac{d.x^3}{dx}$ gleich $3x^2$ ist. — Da in dieser Anleitung die Entwicklung der Differentialrechnung auf denselben Grundgedanken basirt wurde, so ist es überflüssig auf weitere Details hier einzugehen.

62) Methode von Lagrange. Lagrange hat zugestanden, dass die Idee, welche Euler an die Spitze der Differentialrechnung stellt, an sich richtig ist und exact den Algorithmus des Calcul's bezeichnet. Er hält aber diese Art der Begründung, die gleich von vornherein auf den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ führt, die also im Wesentlichen darauf hinausläuft das Grössenverhältniss von Null zu Null, d. h. von Dingen zu bestimmen, die aufgehört haben Grössen zu sein, nicht für genügend klar, um als Ausgangspunkt des Calcul's zu dienen. Nach der Darstellung von Euler ist aber nicht die Rede davon, dass es sich um die Ermittlung des Grössenverhältnisses von Null zu Null handle. Die Nulle sind nur Symbole für die nach einem

bestimmten Rechnungsvorgänge verschwundenen Grössen. Die Entwicklung des Bruches, der das Verhältniss der Differenz einer Function zur Differenz der Grundgrösse derselben bezeichnet, lässt erkennen in wie weit eben dieses Verhältniss von der Zunahme der Veränderlichen abhängt, lässt also auch erkennen welche Grenze dieses Verhältniss erreicht, wenn die Zunahme kleiner und kleiner wird und endlich verschwindet. Doch auch diese Art der Auffassung der Darstellung von Euler hält Lagrange für zu fremd dem Geist der Analyse, als dass dieselbe als der passende Ausdruck des Princip der Differentialrechnung betrachtet werden könne. Er hat daher einen andern Weg betreten, der den Grundzügen nach hier folgen soll.

Es wurde in §. 30 gezeigt, dass die Entwicklung von $f(x+h)$ in eine nach den Potenzen von h geordnete Reihe nur ganze und positive Exponenten von h enthalten könne, so dass man im Allgemeinen setzen kann $f(x+h) = f(x) + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \dots$. Es wurde ferner in §. 28 angegeben, wie unter Anwendung der Differentialrechnung und der Methode der unbestimmten Coefficienten die Werthe der Vorzahlen $B, C, D, \dots$ gefunden werden. Lagrange hat diese Bestimmung auf rein algebraischem Wege zu Stande gebracht. Zunächst ist nämlich klar, dass man setzen kann $f(x+h) = f(x) + hP$, wo P irgend eine Function von x und h bezeichnet. Denn da $f(x+h)$, wenn $h=0$, gleich $f(x)$ wird, so muss h gemeinschaftlicher Factor aller späteren Glieder der Entwicklung von $f(x+h)$ sein.

Bezeichnet ferner p den Werth von P , welchen man erhält, wenn $h=0$ wird, so hat man:

$$P = p + hQ$$

wo Q eine Function von x und h ist. Ebenso kann man setzen:

$$Q = q + hR$$

$$R = r + hS$$

$$\dots\dots\dots$$

wo q den Werth von Q bezeichnet, der dem Fall $h=0$ entspricht, und wo zugleich R eine Function von x und h ist; wo ferner

r den Werth von R für den Fall $h=0$ und S eine Function von x und h bezeichnet, u. s. w.

Führt man die Werthe von P, Q, R, ... nach der Reihe ein, so erhält man:

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + \dots$$

Diese Form stimmt mit der vorausgesetzten überein, zugleich zeigt die Art der Herleitung wie die Werthe von p, q, ... in speciellen Fällen zu bestimmen sind. Es sei z. B. $f(x) = \frac{1}{x^2}$; es ist

hiernach $f(x+h) = \frac{1}{(x+h)^2}$; daher

$$f(x+h) = f(x) + hP, \text{ daher } P = -\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2}, \text{ und } p = -\frac{2}{x^3},$$

$$-\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2} = -\frac{2}{x^3} + hQ, \text{ daher } Q = \frac{3x+2h}{x^3(x+h)^2}, \text{ und } q = \frac{3}{x^4},$$

$$\frac{3x+2h}{x^3(x+h)^2} = \frac{3}{x^4} + hR, \text{ daher } R = -\frac{4x+3h}{x^4(x+h)^2}, \text{ und } r = -\frac{4}{x^5}$$

u. s. w.

Man erhält daher:

$$\frac{1}{(x+h)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \cdot h + \frac{3}{x^4} \cdot h^2 - \frac{4}{x^5} h^3 + \dots$$

Hiermit ist nur der Weg angegeben, auf welchem die Werthe der Functionen p, q, r, ... aus der gegebenen Function sich ableiten lassen. Es liegt dieser Ableitung ein allgemeines Gesetz zu Grund, welches näher zu kennen um so wichtiger ist, als nach demselben die Ableitung auf ganz einfache Operationen sich zurückführen lässt.

Setzt man in der Formel

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \dots$$

$h+i$ statt h , so erhält man:

$$\begin{aligned} f(x+h+i) &= f(x) + p(h+i) + q(h+i)^2 + r(h+i)^3 + \dots \\ &= f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \dots \\ &\quad + i(p + 2qh + 3rh^2 + \dots) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Setzt man aber $x+i$ statt x , so erhält man:

$$f(x+h+i) = f(x+i) + p_1 h + q_1 h^2 + r_1 h^3 + \dots$$

wo $p_1, q_1, r_1, \dots$ die Werthe der Functionen p, q, r, ... bezeichnen, welche dieselben erhalten, wenn man $x+i$ statt x setzt.

Entwickelt man $f(x+i)$ nach den Potenzen von i , so erhält man:

$$f(x+i) = f(x) + p_1 i + q_1 i^2 + r_1 i^3 + \dots$$

Die Entwicklung von $p_1, q_1, r_1, \dots$ welches Functionen von x und i sind, führen zu Reihen, welche im Allgemeinen folgende Formen besitzen:

$$p_1 = p + p' i + p'' i^2 + \dots$$

$$q_1 = q + q' i + q'' i^2 + \dots$$

$$r_1 = r + r' i + r'' i^2 + \dots$$

.....

Man erhält hiernach:

$$\begin{aligned} f(x+h+i) &= f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \dots \\ &\quad + i(p + p'h + q'h^2 + r'h^3 + \dots) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Da man gleiche Werthe erhält, wenn man $h+i$ statt h , und wenn man $x+i$ statt x in $f(x+h)$ setzt, so müssen auch die Reihen, welche für beide Fälle gefunden wurden, und daher auch die Vorzahlen gleicher Potenzen von i in diesen Reihen einander gleich sein; man erhält hiernach:

$$p + 2qh + 3rh^2 + \dots = p + p'h + q'h^2 + \dots$$

Da auch hierin die Vorzahlen gleicher Potenzen von h einander gleich sein müssen, so erhält man:

$$2q = p', \quad 3r = q', \quad \dots$$

Die Werthe von $q, r, \dots$ hängen also ab von den Werthen von $p', q', \dots$, d. h. von den Vorzahlen der ersten Potenz von i , zu welchen die Reihenentwicklung von $p_1, q_1, \dots$ führt.

Bezeichnet man die Vorzahl von h in der Entwicklung von $f(x+h)$ durch $f'(x)$, so dass man hat

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + qh^2 + rh^3 + \dots$$

so erhält man für p_1

$$p_1 = f'(x+i) = f'(x) + f''(x) \cdot i + \dots$$

Es ist daher $p' = f''(x)$; da aber $2q = p'$, so hat man:

$$q = \frac{1}{2} f''(x).$$

Hierdurch wird:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + f''(x) \cdot \frac{h^2}{2} + rh^3 + \dots$$

Es ist daher $q_1 = \frac{1}{2} f''(x + i)$; entwickelt man diesen Ausdruck wie früher, so erhält man:

$$q_1 = \frac{1}{2} f''(x) + \frac{1}{2} f'''(x) \cdot i + \dots$$

Es ist daher $q' = \frac{1}{2} f'''(x)$; da aber $3r = q'$, so hat man:

$$r = \frac{1}{2 \cdot 3} f'''(x).$$

Hierdurch wird

$$60) f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x) \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + f'''(x) \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Das Gesetz, nach welchem die späteren Glieder der Reihe gebildet werden, ist aus den vorliegenden Gliedern und dem Zusammenhang derselben zu erkennen. Zugleich sieht man, dass es nur darauf ankömmt die erste abgeleitete Function $f'(x)$ zu finden, denn die übrigen abgeleiteten Functionen werden nach der Reihe auf ganz gleiche Weise immer aus der vorhergehenden Function abgeleitet.

Lagrange nennt $f(x)$ die primitive Function, und $f'(x)$, $f''(x)$, ... die derivirten Functionen, und zwar nach der Reihe die erste, zweite, ... derivirte Function. Es bedarf keines besonderen Beweises um einzusehen, dass die derivirten Functionen nichts anderes, als die Differentialquotienten verschiedener Ordnungen sind, so dass ist $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$, $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$, u. s. w.

Die Bestimmung der ersten derivirten Function $f'(x)$ oder des Differentialquotienten $\frac{df(x)}{dx}$ geht also darauf zurück: in der Entwicklung von $f(x+h)$ die Vorzahl von h zu finden. Man wird hiermit zu dem Begriff des Differentialquotienten durch rein algebraische Betrachtungen geführt, und dies ist eben der Gesichtspunkt, welchen Lagrange fest hielt, und von welchem aus er die Differentialrechnung begründet und entwickelt hat.

63) Methode von Ampere. Die Methode von Ampere schliesst sich im Ausgangspunkt an die Methode von Euler an. Auch er geht von dem Verhältniss der Differenz der Function zur Differenz der Grundgrösse aus, und stellt das Differential

als den speciellen Fall dar, in welchem die Zunahme der Veränderlichen verschwindend klein wird, oder in welchem Zähler und Nenner des Differenzenverhältnisses nach der Grenze Null convergiren. Das charakteristische seiner Darstellung besteht aber darin, dass er beweist, dass der Ausdruck $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ für den Fall, in welchem h Null wird, in welchem also jener Ausdruck in die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ übergeht, im Allgemeinen eine Function von x ist, und dass dies nur so lange Statt findet, als die verschwindend kleine Zunahme der Veränderlichen innerhalb der Continuität der Function betrachtet wird. Eine Function ist aber innerhalb jener Werthe der Veränderlichen continuirlich, innerhalb welcher eine verschwindend kleine Zunahme der Variablen auch eine verschwindend kleine Zunahme der Function erzeugt; sie wird discontinuirlich, wenn eine verschwindend kleine Zunahme der veränderlichen eine endliche oder gar unendlich grosse Zunahme der Function erzeugen würde. So wird z. B. $\frac{1}{x^2}$ für $x = 0$ discontinuirlich; ebenso wird die Function $\sec. x$ für $x = \frac{2x+1}{2} \pi$ discontinuirlich; dagegen sind x^2 , $\sin. x$ u. s. w. continuirliche Functionen von x .

Der Beweis, dass $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ für den Fall $h = 0$ eine Function von x wird, kann auf folgende Weise geführt werden.

Zunächst ist klar, dass $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ gleich irgend einer Function von x und h sein wird, dass man also setzen kann:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \varphi(x, h).$$

Es kömmt daher nur darauf an zu beweisen, dass, wenn h Null wird, nicht zugleich $\varphi(x, h)$ Null oder unendlich werde; wobei jedoch immer vorausgesetzt wird, dass die Differenz innerhalb der Continuität der Function liegt. Gesetzt nun es seien a und b zwei Werthe von x , welche im Bereiche der Continuität der Function $f(x)$ liegen, zugleich sei $b > a$, so erhält man, wenn man von $f(a)$ zu $f(b)$ fortschreitet, indem man a

fort und fort zunehmen lässt, eine Reihe von Functionen, in welcher jede spätere entweder stets grösser oder stets kleiner als die vorhergehende Function ist. Nimmt man die Unterschiede je zweier auf einander folgender Functionen, so haben dieselben alle gleiche Zeichen, sie sind entweder alle positiv oder alle negativ, je nachdem $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ wächst oder abnimmt.

Setzt man $b = a + nh$, und setzt man in $f(x)$ für x successiv $a, a + h, a + 2h, a + nh$, so erhält man folgende Functionen: $f(a), f(a + h), f(a + 2h) \dots f(a + nh)$. Die Differenzen je zweier auf einander folgender Functionen im Verhältniss zur Zunahme der Grundgrösse sind:

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

$$\frac{f(a + 2h) - f(a + h)}{h},$$

.....

$$\frac{f(a + nh) - f(a + [n-1]h)}{h}.$$

Die Summe all dieser Brüche, die alle gleiche Vorzeichen besitzen, ist:

$$\frac{f(a + nh) - f(a)}{h}.$$

Da aber $a + nh = b$, also $h = \frac{b-a}{n}$ ist, so geht die Summenformel in folgende über:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot n.$$

In diesem Ausdrucke ist $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ eine endliche Grösse.

Es kann daher nicht jeder der obigen n Brüche, deren Summe n mal $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ist, grösser oder kleiner sein als die endliche

genau bestimmte Grösse $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Hieraus folgt aber auch

weiter, dass nicht jeder jener Brüche unendlich gross oder unendlich klein werdend sein kann. Die Resultate bleiben dieselben wie gross oder wie klein n angenommen wird; setzt man

aber n unendlich gross, so wird h unendlich klein und die obigen Brüche gehen in die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ über; für deren Werthe die früheren Folgerungen gültig bleiben.

Es ist hiermit zugleich erwiesen, dass der Werth des Ausdruckes:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

wenn h verschwindet, wodurch der Quotient in die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ übergeht, weder eine unendlich gross werdende noch eine unendlich klein werdende Grösse wird, sondern im Allgemeinen an eine von x abhängige Grenze gebunden ist. Man bezeichnet dieses Uebergehen zur Grenze durch $\lim$, und kann, da der Grenzausdruck selbst eine Function von x ist, das gewonnene Resultat in folgenden Zeichen festhalten:

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Es ist leicht zu erkennen, dass dieser Grenzausdruck nichts anderes, als der Differentialquotient von $f(x)$ ist, so dass man hat:

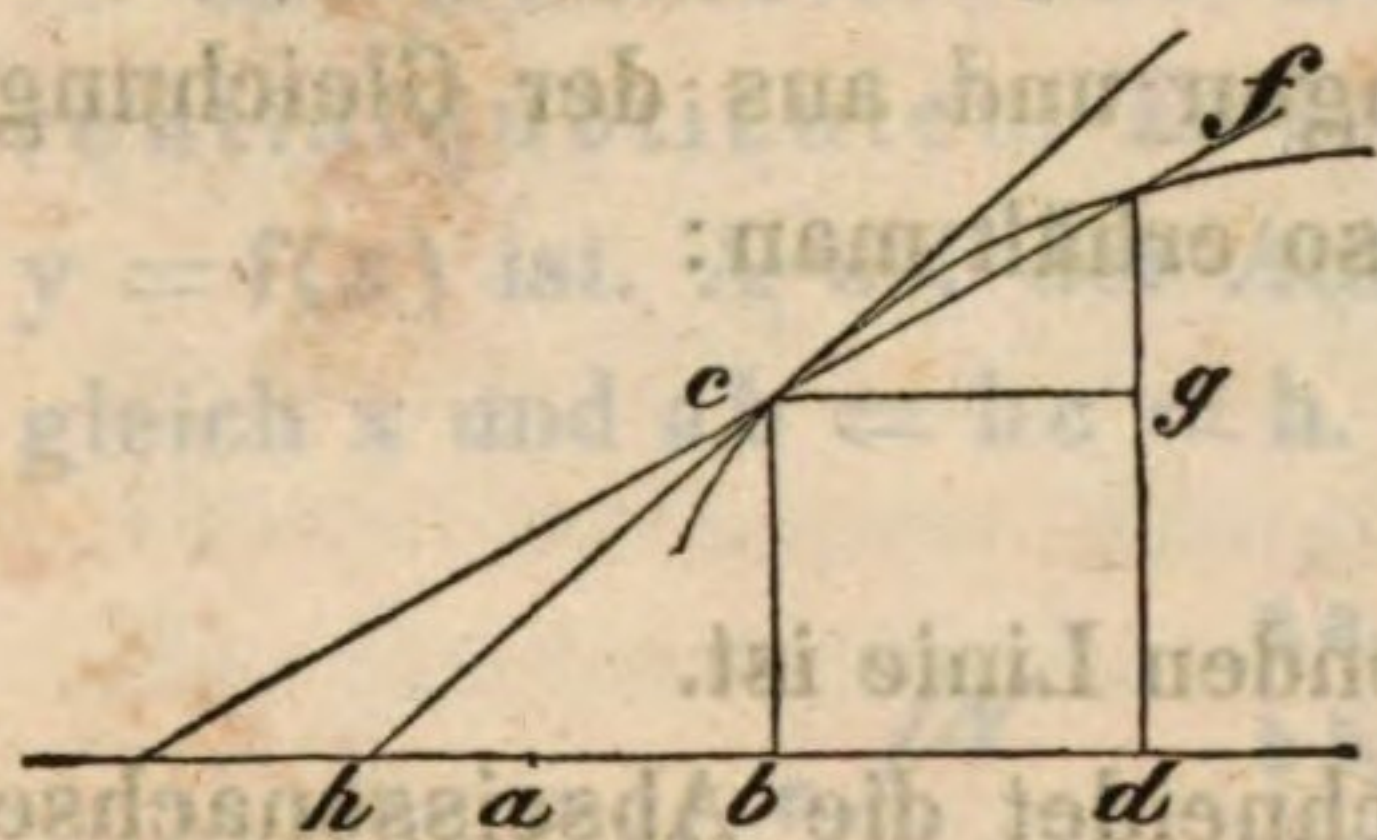
$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Achter Abschnitt.

Anwendung der Differentialrechnung auf Geometrie.

64) Es wurde schon bei Entwicklung der Methode des unendlich Kleinen angeführt, welche wesentliche Erleichterungen und Erweiterungen in den Untersuchungen der analytischen Geometrie durch Anwendung der Differentialrechnung eingetreten sind. Es sollen in dem Folgenden einige der wichtigeren Punkte dieser Anwendungen erläutert werden.

65) Geometrische Bedeutung des ersten Differentialquotienten. Es sei $y=f(x)$ die Gleichung einer beliebigen



Curve. $ab = x$, $bc = y$ seien die Ordinaten eines Punktes dieser Curve. Nimmt x um ein Stück $bd = h$ zu, so wird auch y zunehmen, und man erhält:

$$df = f(x+h).$$

Verbindet man c mit f , und zieht man durch c eine Linie cg parallel zu ad , so hat man:

$$\text{tang. } fcg = \frac{fg}{cg} = \frac{fd - gd}{cg} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Es giebt diese Formel den Werth der Tangente jenes Winkels an, welchen die Sehne cf mit der Abscissenachse ad bildet. Je näher f an c liegt, oder je kleiner h wird, um so mehr nähert sich die Richtung der Sehne der der Tangente. Wird h verschwindend klein, so fällt die Sehne mit der Tangente ch zusammen, es wird der Winkel $fcg = chb$, und man erhält:

$$\text{tg. } chb = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Es drückt demnach der erste Differentialquotient die trigonometrische Tangente des Winkels aus, welchen die an einen Punkt der Curve gezogene Tangente mit der Abscissenachse

bildet. — Wird $\frac{dy}{dx}$ für bestimmte Werthe von x gleich Null, so wird auch der Winkel chb gleich Null, d. h. die Tangente wird parallel zur Abscissenachse. Wird $\frac{dy}{dx}$ gleich ∞ , so wird chb gleich 90° , d. h. die Tangente bildet mit der Abscissenachse einen rechten Winkel.

Die Entwicklung der Gleichung der Tangente an einem bestimmten Punkt einer Curve $y = f(x)$ schliesst sich an das Vorhergehende an. Die Gleichung der geraden Linie ist im Allgemeinen $y = ax + b$. Soll dieselbe die Curve in einem Punkte, dessen Ordinaten x, y sind, berühren, so muss sein

$$y = ax + b \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = a = \frac{dy}{dx}.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen und aus der Gleichung $y = ax + b$ die Grössen a und b , so erhält man:

$$y - y = \frac{dy}{dx} (x - x)$$

welches die Gleichung der berührenden Linie ist.

Die Tangente $y = ax + b$ schneidet die Abscissenachse in einem Punkte, dessen Abscisse $x = -\frac{b}{a}$ ist. Die Subtan-

gente der Curve ist daher $\frac{b}{a} + x$. Es ist aber $a = \frac{dy}{dx}$ und b

$= y - ax = y - \frac{dy}{dx} x$, daher die Subtangente gleich

$$y \frac{dx}{dy}.$$

Es sei $y_2 = a_1 x_2 + b_1$ die Gleichung einer zur Tangente $y_1 = ax_1 + b$ senkrechten Linie. In diesem Falle ist $a_1 = -\frac{1}{a}$, daher

$$y_2 = -\frac{1}{a} \cdot x_2 + b_1.$$

Geht überdiess diese Linie durch Berührungspunkt x, y der Tangente, so ist auch

$$y = -\frac{1}{a} x + b_1.$$

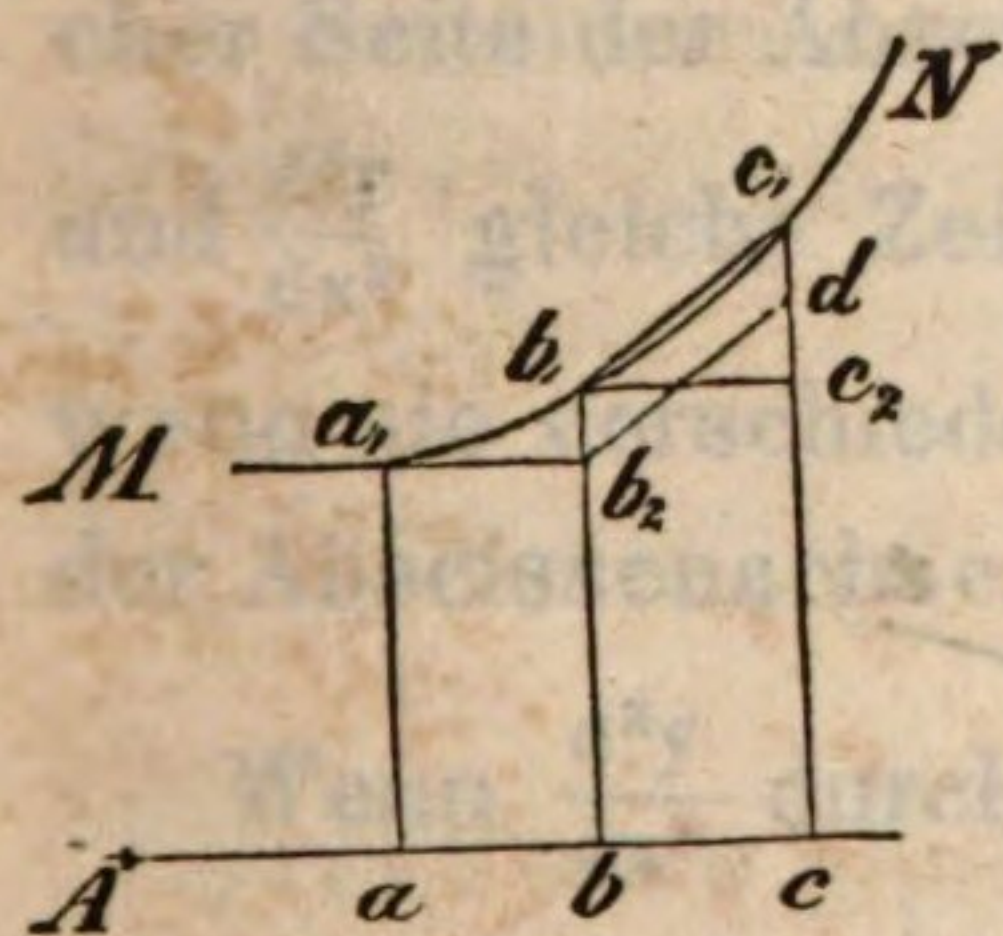
Eliminirt man aus diesen Gleichungen b_1 und setzt man für a seinen Werth $\frac{dy}{dx}$, so erhält man die Gleichung der im Punkte x, y normalen Linie, nämlich:

$$y_2 - y = - \frac{dx}{dy} (x_2 - x).$$

Die Linie $y_2 = a_1 x_2 + b_1$ schneidet die Abscissenachse in einem Punkte, dessen Abscisse $x_2 = -\frac{b_1}{a_1}$ ist. Die Subnormale ist daher $\frac{b_1}{a_1} + x$. Es ist aber $a_1 = -\frac{1}{a} = -\frac{dx}{dy}$ und $b_1 = y + \frac{x}{a} = y + x \frac{dx}{dy}$, daher die Subnormale gleich

$$-y \frac{dy}{dx}.$$

66) Geometrische Bedeutung des zweiten Differentialquotienten. Es sei $M N$ eine Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist. A sei der Anfangspunkt der Abscissen, $A a$ sei gleich x und $ab = bc = h$. Es ist hiernach



$$\begin{aligned} a a_1 &= f(x), \\ b b_1 &= f(x+h), \\ c c_1 &= f(x+2h), \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} b_1 b_2 &= b b_1 - a a_1 = f(x+h) - f(x), \\ c_1 c_2 &= c c_1 - b b_1 = f(x+2h) - f(x+h), \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

daher
$$\frac{b_1 b_2}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

$$\frac{c_1 c_2}{h} = \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} = \frac{\Delta f(x+h)}{\Delta x}$$

.....

Zieht man $b_2 d$ parallel zur Sehne $b_1 c_1$, so hat man:

$$c_2 d = c_1 c_2 - b_1 b_2 = \Delta f(x+h) - \Delta f(x),$$

daher wird

$$\frac{c_2 d}{h} = \frac{c_1 c_2}{h} - \frac{b_1 b_2}{h} = \frac{\Delta f(x+h)}{\Delta x} - \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

und
$$\frac{c_2 d}{h^2} = \frac{\frac{c_1 c^2}{h} - \frac{b_1 b_2}{h}}{h} = \frac{\frac{\Delta f(x+b)}{\Delta x} - \frac{\Delta f x}{\Delta x}}{h} = \frac{\Delta \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}.$$

Geht man zu dem speciellen Fall über, in welchem h oder Δx verschwindend klein oder Null wird, so wird $\frac{c_2 d}{h^2}$ gleich

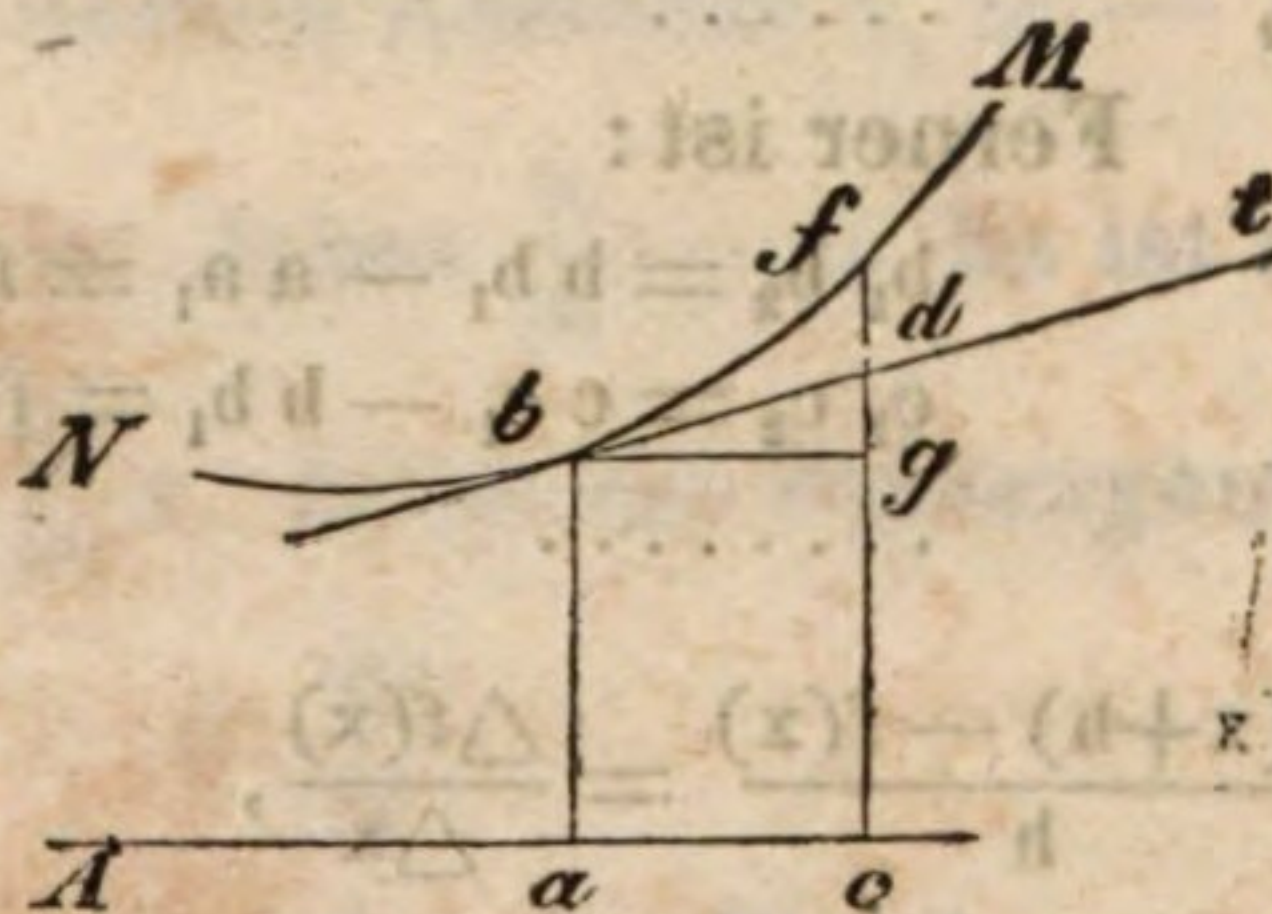
$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Durch specielle Werthe von x wird $\frac{d^2 y}{dx^2}$, je nach Beschaffenheit der Gleichung $y = f(x)$, bald positiv, bald negativ, bald Null werden. Es sind aber hiermit, wie sogleich eine nähere Untersuchung zeigen wird, eben so viele Eigenthümlichkeiten in Bezug auf die Form der Curve angezeigt.

67) Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer Curve NM. Aa sei gleich x , $ab = y$, $ac = bg = h$, und bt sei eine Tangente im Punkte b . — Es ist

$$fc = f(x+h) = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \dots$$

$$\begin{aligned} dc &= gc + dg = y + h \cdot \text{tang. } dbg \\ &= y + \frac{dy}{dx} \cdot h \end{aligned}$$



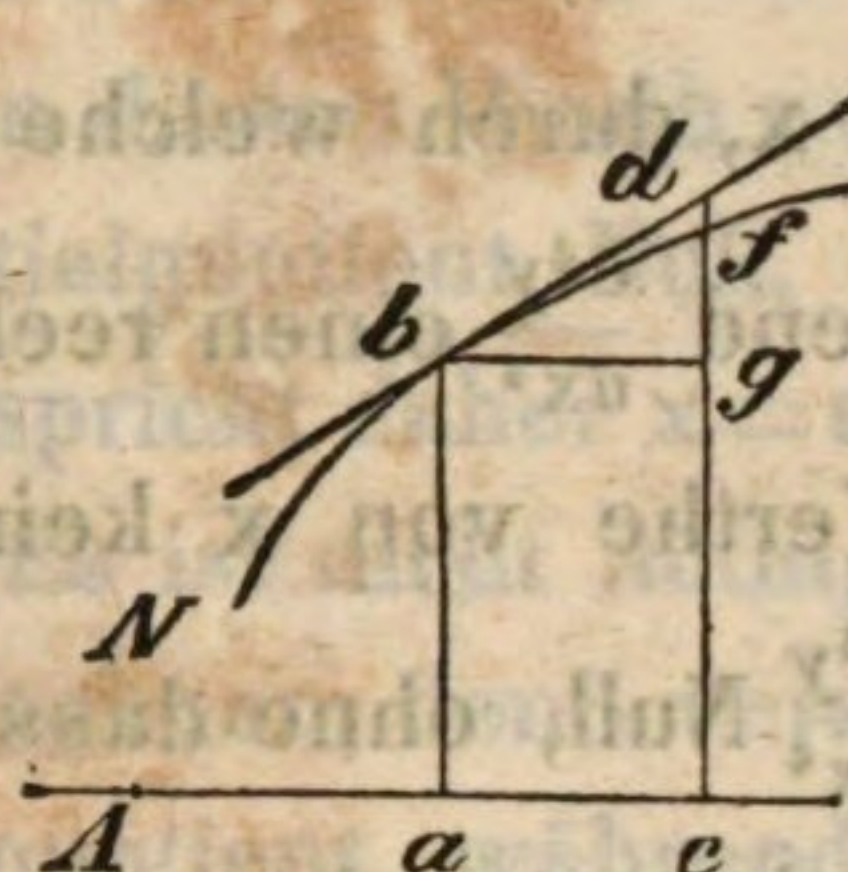
Hiernach ist:

$$fc - dc = \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3 y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2 \cdot 3} + \dots$$

Unter der Voraussetzung, dass h sehr klein ist, können die späteren Glieder gegen das erste Glied der Reihe vernachlässiget werden, so dass man hat

$$fc - dc = \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2}.$$

Der Unterschied $fc - dc$ ist positiv, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist. In diesem Falle ist aber $fc > dc$, d. h. die Curve kehrt ihre Convexität der Abscissenachse zu. Ist dagegen $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, so ist



$fc < dc$, und die Curve kehrt ihre Concavität gegen die Abscissenachse.

Liegt die Curve unter der Abscissenachse, so sind fc, dc an sich negativ, man hat daher:

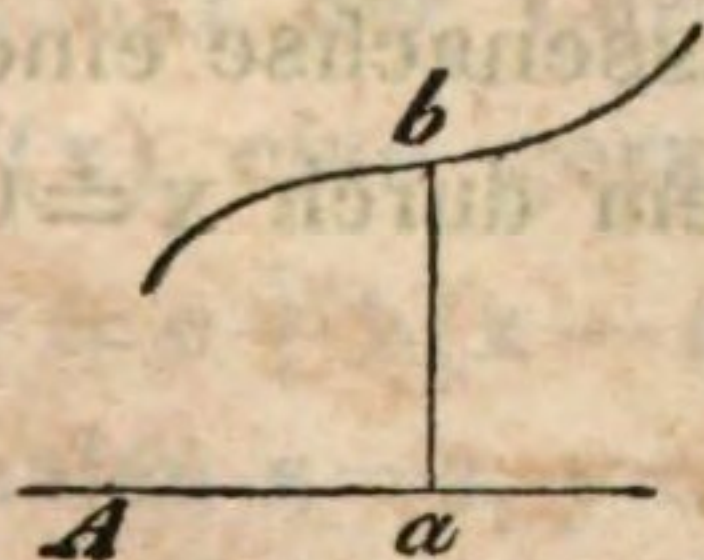
$$-fc + dc = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2}.$$

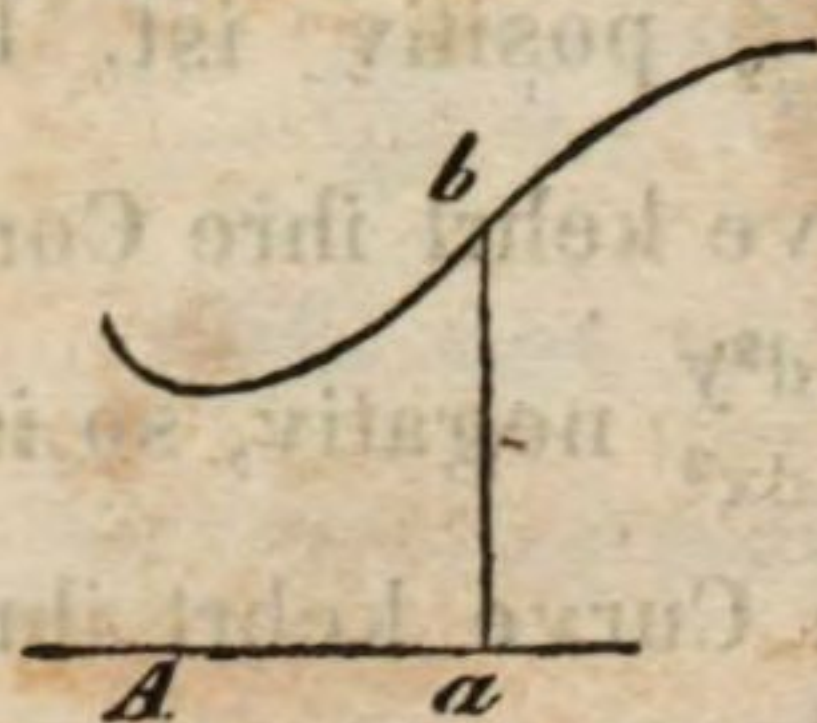
Ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, so ist $fc > dc$, d. h. die Curve kehrt ihre Convexität gegen die Abscissenachse. Ist dagegen $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv, so ist $fc < dc$, und es kehrt die Curve ihre Concavität der Abscissenachse zu. Man kann daher allgemein sagen, auf welcher Seite der Abscissenachse die Curve liegen mag, wenn y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleiche Zeichen besitzen, so ist die Convexität, und wenn sie verschiedene Zeichen besitzen, so ist die Concavität der Abscissenachse zugekehrt.

Wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ durch specielle Werthe von x Null wird, so hat man:

$$fc - dc = \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Es erhält daher $fc - dc$ verschiedene Zeichen, je nachdem man $+h$ oder $-h$ für h setzt, d. h. die Krümmungen der Curve sind auf beiden Seiten der Ordinate ba von entgegengesetzter Art. Ist auf der einen Seite von ba die Concavität der Abscissenachse zugekehrt, so ist auf der andern Seite von ba die Convexität der Curve gegen die Abscissenachse gekehrt.





Der Punkt b wird ein Wendungspunkt der Curve genannt. Die Wendungspunkte einer Curve ergeben sich aus der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Sollte es der Fall sein, dass durch eben die Werthe von x , durch welche $\frac{d^2y}{dx^2}$ Null wird, auch $\frac{d^3y}{dx^3}$ verschwindet, während $\frac{d^4y}{dx^4}$ einen reellen Werth erhält, so zeigen die gleichen Werthe von x keinen Wendungspunkt an. Wird dagegen auch $\frac{d^4y}{dx^4}$ Null, ohne dass $\frac{d^5y}{dx^5}$ verschwindet, so hat die Curve einen Wendungspunkt u. s. w.

Wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ durch specielle Werthe von x unendlich wird, so kann auch in diesem Falle die Curve Wendungspunkte besitzen. Gesetzt nämlich durch $x = a$ werde $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich, so kann es eintreten, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $x = a + h$ und $x = a - h$ endliche Werthe besitzt und entgegengesetzte Zeichen erhält.

Die Abscissen, die den Wendungspunkten einer Curve entsprechen, werden also erhalten durch Entwicklung der Werthe von x aus den Gleichungen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = \infty.$$

1tes Beispiel. Es sei $y = x^3$ die Gleichung einer Curve.

Es ist: $\frac{dy}{dx} = 3x^2, \frac{d^2y}{dx^2} = 6x, \frac{d^3y}{dx^3} = 6.$

Da durch $x = 0$ der zweite Differentialquotient Null wird ohne dass der dritte verschwindet, so hat die Curve einen Wendungspunkt. Es fällt derselbe mit dem Anfangspunkt der Abscissenachse zusammen, und zugleich ist die Abscissenachse eine Tangente im Wendungspunkt der Curve, indem durch $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$ wird.

2tes Beispiel. Es sei $y = (a - x)^5$ die gegebene Gleichung.

Es ist: $\frac{dy}{dx} = -5(a-x)^4$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 20(a-x)^3$, $\frac{d^3y}{dx^3} = -60(a-x)^2$,

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 120(a-x), \quad \frac{d^5y}{dx^5} = -120a.$$

Hier wird durch $x=a$ der zweite Differentialquotient Null. Durch eben diesen Werth von x wird auch der dritte und vierte Differentialquotient Null, ohne dass der fünfte verschwindet. Es entspricht daher $x=a$ einem Wendungspunkt der Curve.

Es ist nicht nöthig, die höheren Differentialquotienten auszurechnen, denn verschwindet durch $x=a$ der zweite Differentialquotient, während durch $x=a+h$ und $x=a-h$ derselbe Werthe mit entgegengesetzten Zeichen erhält, so ist hiermit ebenfalls ein Wendungspunkt angezeigt.

3tes Beispiel. Es sei $(y-a)^3 = x^5$ die gegebene Gleichung.

$$\text{Es ist: } \frac{dy}{dx} = \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Der Gleichung $\frac{10}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$ geschieht nur Genüge durch x gleich

unendlich, und da durch $x = \infty \pm h$ der Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ nicht mit verschiedenen Zeichen auftritt, so entspricht $x = \infty$ keinen Wendungspunkt. — Die Gleichung $\frac{10}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty$ giebt $x = 0$.

Setzt man $x = 0 \pm h$, so erhält man $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{h}}$, die Curve

hat daher im Anfangspunkt der Abscissenachse einen Wendungspunkt.

68) Wenn $y = f(x)$ durch $x=a+h$ reell und durch $x=a-h$ imaginär, oder durch $x=a-h$ reell und durch $x=a+h$ imaginär wird, so entspricht den Ordinaten $x=a$, $y=f(a)$ ein Grenzpunkt der Curve. Dies ist im Allgemeinen der Fall, wenn $f(x)$ eine gerade Wurzel von x enthält. So hat die Curve $y = c + b(x-a)^2 + (x-a)^{\frac{3}{2}}$ einen Grenzpunkt, dessen Ordinalen $x=a$, $y=c$ sind, denn es wird y durch $x=a+h$ reell und durch $x=a-h$ imaginär.

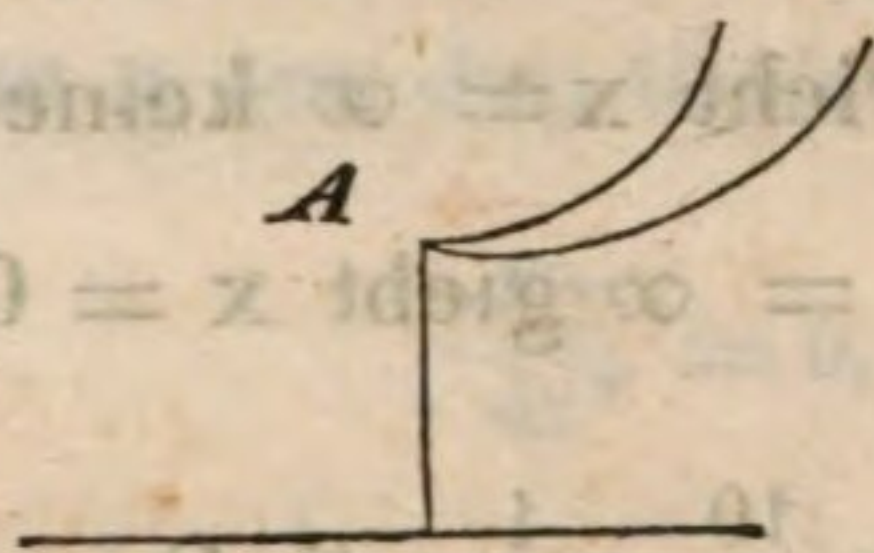
Wenn $y = f(x)$ eine gerade Wurzel von x enthält, so ist auch x in $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit einem geraden Wurzelexponenten enthalten.

Es wird daher auch $\frac{d^2y}{dx^2}$ durch $x = a + h$ reell und durch $x = a - h$ imaginär, zugleich erhält aber $\frac{d^2y}{dx^2}$ durch $x = a + h$ wegen dem geraden Wurzelexponenten zwei Werthe. Hieraus folgt, dass die Curve zwei Arme besitzt, die in dem Punkte $x = a$, $y = f(a)$ zusammentreffen. Eben dieser Punkt wird ein Umkehrungspunkt der Curve genannt.

1tes Beispiel. Es sei $y = c + b(x - a)^2 \pm (x - a)^{\frac{3}{2}}$ die Gleichung einer Curve.

$$\text{Es ist: } \frac{dy}{dx} = 2b(x - a) \pm \frac{3}{2}(x - a)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2b \pm \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{x - a}}.$$

Durch $x = a$ wird $y = c$, durch $x = a + h$ wird y reell, und durch $x = a - h$ imaginär. Es ist daher $x = a$, $y = c$ zunächst ein Grenzpunkt der Curve. Da aber $\frac{d^2y}{dx^2}$ durch $x = a + h$ zwei Werthe erhält und durch $x = a - h$ imaginär wird, so ist $x = a$, $y = c$ ein Umkehrungspunkt der Curve. Die beiden



Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$ nämlich $2b \pm \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{h}}$ sind positiv, denn es kann immer h so klein gedacht werden, dass $2b > \frac{1}{\sqrt{h}}$ ist. Zugleich wird

y durch $x = a + h$ positiv. Es sind daher die beiden Arme der Curve, welche in A zusammentreffen, convex gegen die Abscissenachse.

2tes Beispiel. Es sei $y = (x - a) \pm x^{\frac{5}{2}}$ die Gleichung einer Curve.

$$\text{Es ist: } \frac{dy}{dx} = \pm \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{15}{4} x^{\frac{1}{2}}.$$

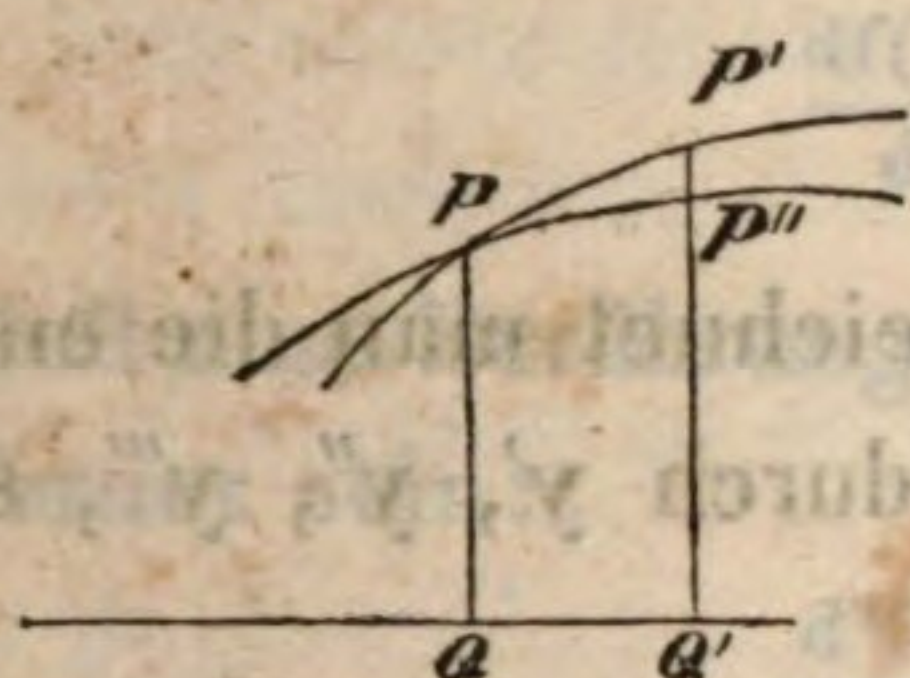
Durch $x = 0$ wird $y = -a$, durch $x = 0 + h$ wird y reell und durch $x = 0 - h$ imaginär. Es ist daher $x = 0$, $y = -a$ ein Grenzpunkt der Curve. Zugleich erhält $\frac{d^2y}{dx^2}$ durch $x = 0 + h$ zwei

reelle Werthe; es ist daher $x=0$, $y=-a$ ein Umkehrungspunkt der Curve. Da y durch $x=0+h$ unter der Voraussetzung, dass h sehr klein ist, negativ wird, während



$\frac{d^2y}{dx^2}$ einen positiven und einen negativen Werth erhält, so ist von den beiden Curvenarmen, die unter der Abscissenachse liegen und im Umkehrungspunkt A zusammen treffen, der eine concav, der andere convex gegen die Abscissenachse.

69) Berührung der Curven (Osculation). Es seien



$y_1 = f(x_1)$, $y_2 = F(x_2)$ die Gleichungen zweier Curven, die einen Punkt P, dessen Ordinaten x , y sind, gemeinschaftlich haben. Es folgt hieraus $f(x) = F(x)$.

Um den Lauf beider Curven in der Nähe des Punktes P zu untersuchen, lasse man x um h zunehmen. Man erhält für die entsprechenden Ordinaten $Q'P'$, $Q'P''$ der beiden Curven folgende Gleichungen:

$$Q'P' = f(x+h) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} \cdot h + \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

$$Q'P'' = F(x+h) = F(x) + \frac{dF(x)}{dx} \cdot h + \frac{d^2F(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

Je kleiner der Unterschied von $Q'P'$ und $Q'P''$ ist, um so weniger ist der Lauf beider Curven in der Nähe von P verschieden. Dieser Unterschied ist aber um so kleiner, je mehr Glieder beider Reihen vom Anfang aus einander gleich sind.

Wenn nur $f(x) = F(x)$, so haben die Curven nur einen Punkt gemeinschaftlich. Wenn überdiess $\frac{df(x)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx}$, so sagt man: die Curven haben in P eine Berührung der ersten Ordnung. Wenn ferner $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d^2F(x)}{dx^2}$, so haben die Curven eine Berührung der zweiten Ordnung u. s. w.

Zwischen zwei Curven, die eine Berührung der zweiten Ordnung besitzen, kann keine berührende Curve der ersten

Ordnung liegen. Und allgemein liegt zwischen zwei berührenden Curven einer höheren Ordnung keine Berührende einer niederen Ordnung.

Denn gesetzt es seien $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = F(x_2)$, $y_3 = \varphi(x_3)$ die Gleichungen dreier Curven, von denen die beiden ersten im Punkte x , y Berührende der zweiten Ordnung sind, während die dritte nur eine Berührende der ersten Ordnung ist. Man hat hiernach

$$f(x) = F(x) = \varphi(x) = A$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} = B$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d^2F(x)}{dx^2} = C.$$

Lässt man x um h zunehmen, und bezeichnet man die entsprechenden Ordinaten der drei Curven durch y' , y'' , y''' , so hat man:

$$y' = f(x+h) = A + Bh + C \frac{h^2}{1 \cdot 2},$$

$$y'' = F(x+h) = A + Bh + C \frac{h^2}{1 \cdot 2},$$

$$y''' = \varphi(x+h) = A + Bh + \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \frac{h^2}{1 \cdot 2}.$$

Es sind hier die Glieder mit h^3 , h^4 , ... gegen die Glieder mit h^2 vernachlässiget, indem h als eine sehr kleine gegen Null convergirende Grösse betrachtet wird. Da $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$ von C nach der Voraussetzung verschieden ist, so wird es entweder grösser oder kleiner als C sein, es kann daher der Punkt, der den Ordinaten $x+h$, y''' entspricht, nicht zwischen den Punkten $x+h$, y' , und $x+h$, y'' liegen, d. h. es kann die dritte Curve nicht zwischen die beiden ersten fallen.

70) Wenn die Gleichungen zweier Curven gegeben sind, jedoch so, dass über die Constanten der einen Curve oder einer der Gleichungen noch verfügt werden kann, so können dieselben immer so bestimmt werden, dass die zweite Curve die erste berührt. Die Ordnung der Berührung ist abhängig von

der Zahl der Constanten und der Beschaffenheit der gegebenen Gleichungen.

Gesetzt es seien

$$y_1 = f(x_1) \text{ und } y_2 = F(x_2, a, b, c, \dots)$$

die gegebenen Gleichungen, und x, y seien die Ordinaten des Berührungspunktes. Da beide Curven diesen Punkt gemeinschaftlich haben, so ist

$$f(x) = F(x, a, b, c, \dots).$$

Soll eine Berührung der ersten Ordnung eintreten, so muss überdiess sein

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dF(x, a, b, c, \dots)}{dx}.$$

Soll eine Berührung der zweiten Ordnung Statt finden, so muss ferner sein:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d^2F(x, a, b, c, \dots)}{dx^2}$$

u. s. w. Da $f(x) = y$, so hat man auch:

$$y = F(x, a, b, c, \dots),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF(x, a, b, c, \dots)}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2F(x, a, b, c, \dots)}{dx^2}, \text{ u. s. w.}$$

In diesen Gleichungen sind $a, b, c, \dots$ die unbekannten Grössen, während $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ als bekannte Grössen auftreten, die durch die ursprüngliche Gleichung $y=f(x)$, und deren successiven Differentialien gegeben sind. Die Constanten $a, b, c, \dots$ sind daher nach bekannten Regeln aus den vorstehenden Gleichungen abzuleiten.

Wenn die Gleichung $y_2 = F(x_2, a, b, c, \dots)$ nur zwei constante Grössen enthält, so dass $c=0, d=0, \dots$, so kommen zur Bestimmung der Constanten a, b nur die Gleichungen

$$y = F(x, a, b)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF(x, a, b)}{dx}$$

in Anwendung. Es kann daher die Curve $y_2 = F(x_2, a, b)$ nur eine Berührende der ersten Ordnung zur Curve $y_1 = f(x_1)$ werden. Enthält $y_2 = F(x_2, a, b, c \dots)$ drei Constante, so können dieselben so bestimmt werden, dass eine Berührung der zweiten Ordnung eintritt u. s. w.

Erste Aufgabe. Es ist gegeben die Gleichung einer Curve $y_1 = f(x_1)$, und die Gleichung einer geraden Linie $y_2 = ax_2 + b$. Man soll die Constanten a, b so bestimmen, dass die Linie $y_2 = ax_2 + b$ die Curve $y_1 = f(x_1)$ in einem Punkte, dessen Ordinaten x, y sind, berührt.

$$\begin{aligned} \text{Es ist:} \quad y &= ax + b \\ \frac{dy}{dx} &= a \end{aligned}$$

Eliminirt man hieraus und aus der Gleichung $y_2 = ax_2 + b$ die Grössen a, b , so findet man:

$$y_2 - y = (x_2 - x) \frac{dy}{dx}.$$

Zweite Aufgabe. Es ist gegeben die Gleichung einer Curve $y_1 = f(x_1)$, und die Gleichung eines Kreises $(x_2 - \alpha)^2 + (y_2 - \beta)^2 = r^2$, wo α, β die Ordinaten des Mittelpunktes sind und r der Radius des Kreises ist. Man soll die Constanten α, β, r so bestimmen, dass der Kreis in einem Punkte, dessen Ordinaten x, y sind, die Curve berührt.

Da drei Constante in der Gleichung des Kreises enthalten sind, so ist eine Berührung der zweiten Ordnung möglich. Zur Bestimmung der Constanten hat man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 &= r^2 \\ (x - \alpha) + (y - \beta) \frac{dy}{dx} &= 0 \\ 1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \beta) \frac{d^2y}{dx^2} &= 0. \end{aligned}$$

Man erhält hieraus:

$$\alpha = x - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\beta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$r = \pm \frac{\left(1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Führt man diese Werthe in der Gleichung $(x_2 - \alpha)^2 + (y_2 - \beta)^2 = r^2$ ein, so erhält man die Gleichung des Kreises, welcher im Punkte x, y mit der Curve $y_1 = f(x_1)$ eine Berührung der zweiten Ordnung besitzt.

Man nennt diesen Kreis den Krümmungskreis, und den Halbmesser desselben den Krümmungshalbmesser. Der Krümmungskreis kann dazu dienen die Krümmung einer Curve an der entsprechenden Stelle zu bestimmen, indem dort ein sehr kleiner Bogen des Kreises nur wenig von dem Bogen der Curve verschieden sein kann.

Beispiel. Die Gleichung der Parabel ist $y^2 = bx$. Es ist daher $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2y}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{4y^3}$. Der Krümmungshalbmesser ist daher:

$$r = \pm \frac{\left(1 + \frac{b^2}{4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{b^2}{4y^3}}.$$

Da der Krümmungshalbmesser an sich eine positive Grösse ist, so ist das untere Zeichen zu wählen, und man erhält:

$$r = \frac{(4y^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{2b^2} = \frac{(4x + b)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{b}}.$$

Je kleiner x wird, um so kleiner wird r , und um so stärker die Krümmung der Parabel.

71) Evoluten der Curven. Wenn zu einem jeden Punkte einer Curve die Mittelpunkte der Krümmungskreise bestimmt werden, so erhält man eine Reihe von Punkten, die einer neuen Curve angehören und nach einem Gesetze aufeinander folgen, welches von der Beschaffenheit der gegebenen Curve abhängig

ist. Man nennt die gegebene Curve die Evolvente, und die Curve der Mittelpunkt der Krümmungskreise die Evolute.

Die Gleichung der Evolute ist hiernach die allgemeine Gleichung für die Ordinalien α , β der Mittelpunkte der Krümmungskreise. Sie wird erhalten, wenn man aus den Gleichungen

$$\alpha = x - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx},$$

$$\beta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

und aus der Gleichung der gegebenen Curve

$$y = f(x)$$

die Grössen x , y eliminirt.

1tes Beispiel. Die gegebene Curve sei eine Parabel, deren Gleichung $y^2 = bx$ ist.

Man erhält:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{b}}{x\sqrt{x}}.$$

Führt man diese Werthe in den Gleichungen für die Ordinalen der Mittelpunkte ein, so erhält man:

$$\alpha = \frac{bx + b}{2},$$

$$\beta = \frac{y\sqrt{b} - 4x\sqrt{x} - b\sqrt{x}}{\sqrt{b}}.$$

Eliminirt man hieraus und aus der Gleichung $y^2 = bx$ die Grössen x , y , so findet man:

$$\beta = \frac{4}{\sqrt{b}} \left(\frac{2\alpha - b}{b} \right)^{\frac{3}{2}},$$

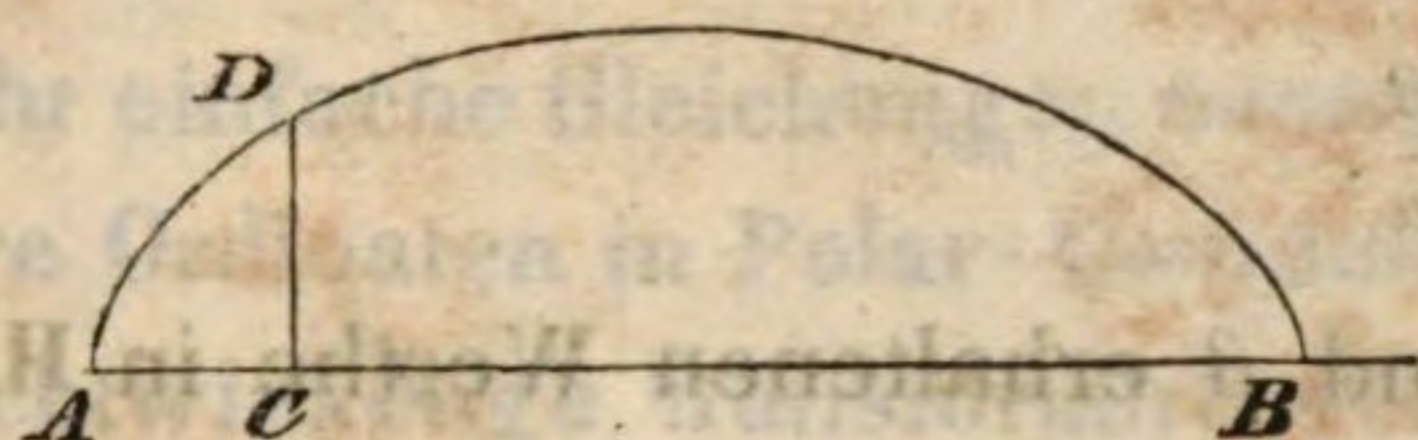
welches die Gleichung der Evolute der Parabel ist.

Es wird β Null, wenn $\alpha = \frac{b}{2}$ wird. Wenn α kleiner als $\frac{b}{2}$, so wird β imaginär, es ist daher $\alpha = \frac{b}{2}$, $\beta = 0$ der Anfangspunkt

der Evolute. Da $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \mp \frac{3}{\sqrt{b}} \left(\frac{2\alpha-b}{6} \right)^{-\frac{1}{2}}$, so hat die Evolute zwei Arme, den einen unter, den andern über der Abscissenachse, und beide Arme sind convex gegen die Abscissenachse.



2tes Beispiel. Die gegebene Curve sei eine Cycloide. Es sei a der Halbmesser des Erzeugungskreises, die Grundlinie AB der Cycloide sei die Abscissenachse, und die Ordinaten eines beliebigen Punktes D seien $AC = x$, $CD = y$.



Die Gleichung der Cycloide ist:

$$x = a \text{ Arc. } \left(\sin. = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a} \right) - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Man erhält hieraus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}.$$

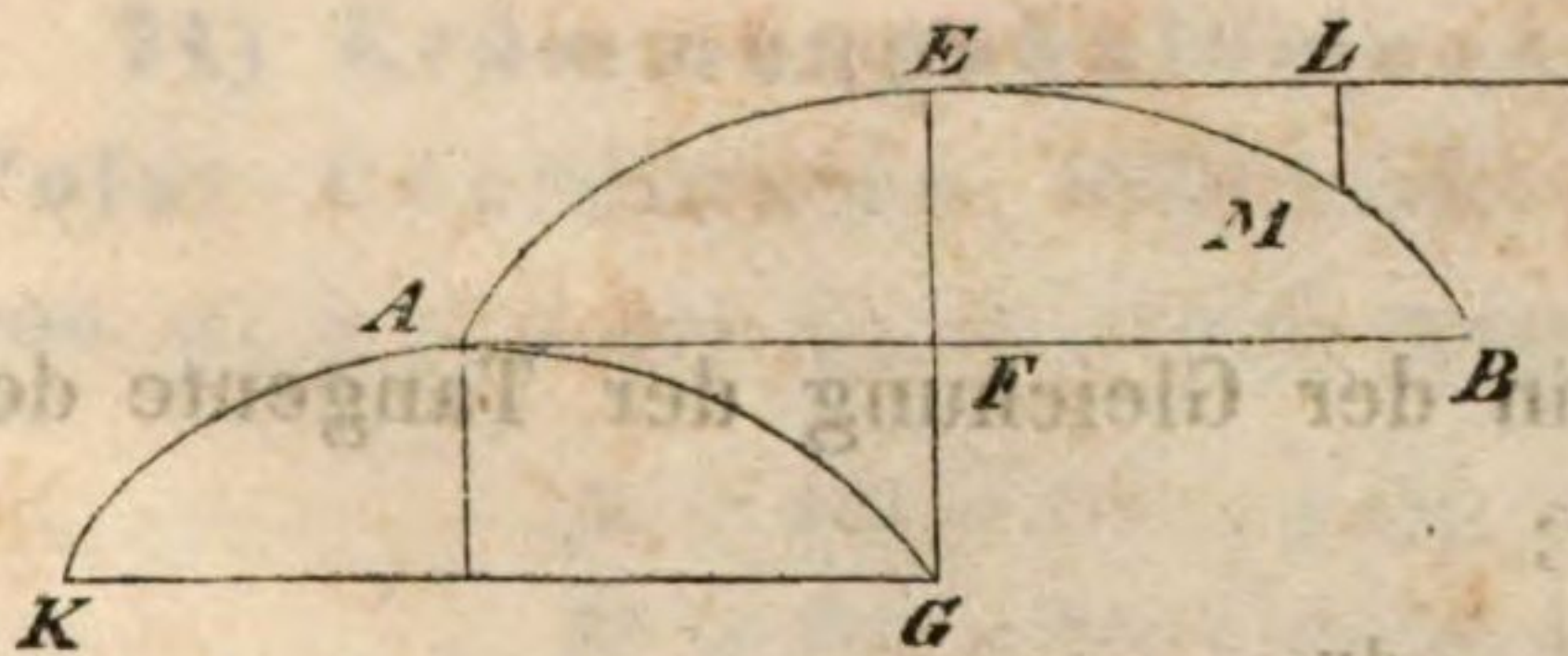
Führt man diese Werthe in den oben aufgestellten Gleichungen ein, so findet man:

$$\alpha = x + 2\sqrt{2ay - y^2}$$

$$\beta = -y.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen und aus der Gleichung der Cycloide die Grössen x und y , so erhält man:

$$\alpha = a \text{ Arc. } \left(\sin. = \frac{\sqrt{-2\alpha\beta - \beta^2}}{a} \right) + \sqrt{-2\alpha\beta - \beta^2}.$$



Man erkennt, dass α nur für negative Werthe von β reeller Werthe erhalten kann. Es liegt daher die Evolute unter der Abscissenachse.

Ferner ist die Gleichung einer Cycloide, vom Scheitel E aus gerechnet,

$$x_1 = a \text{ Arc. } \left(\sin. = \frac{\sqrt{2ay_1 - y_1^2}}{a} \right) + \sqrt{2ay_1 - y_1^2}$$

wo die Ordinaten eines Punktes M durch $EL = x_1$, $LM = +y_1$ bezeichnet sind. Setzt man $x_1 = \alpha$, und $y_1 = -\beta$, so erhält man eine Gleichung, die mit der Gleichung der Evolute identisch ist. Es ist daher die Evolute eine Cycloide, deren Scheitel in A sich befindet, deren Erzeugungskreis einen Halbmesser a hat, und deren Grundlinie $KG = AB$ ist.

72) Die Gleichung der Tangente der Evolute ist nach §. 65

$$(y - \beta) = (x - \alpha) \frac{d\beta}{d\alpha}.$$

Wenn man die in §. 71 für α und β erhaltenen Werthe in Hinsicht x differentirt, so erhält man:

$$\frac{d\alpha}{dx} = 1 - \frac{dA}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} - A \frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{dA}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{dy^2}{dx^2},$$

und
$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dA}{dx},$$

wo der Kürze halber $\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ durch A bezeichnet ist.

Multipliziert man die letzte der eben erhaltenen Gleichung mit $\frac{dy}{dx}$, so erhält man:

$$\frac{d\beta}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dA}{dx} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Es ist daher:

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Hieraus folgt:

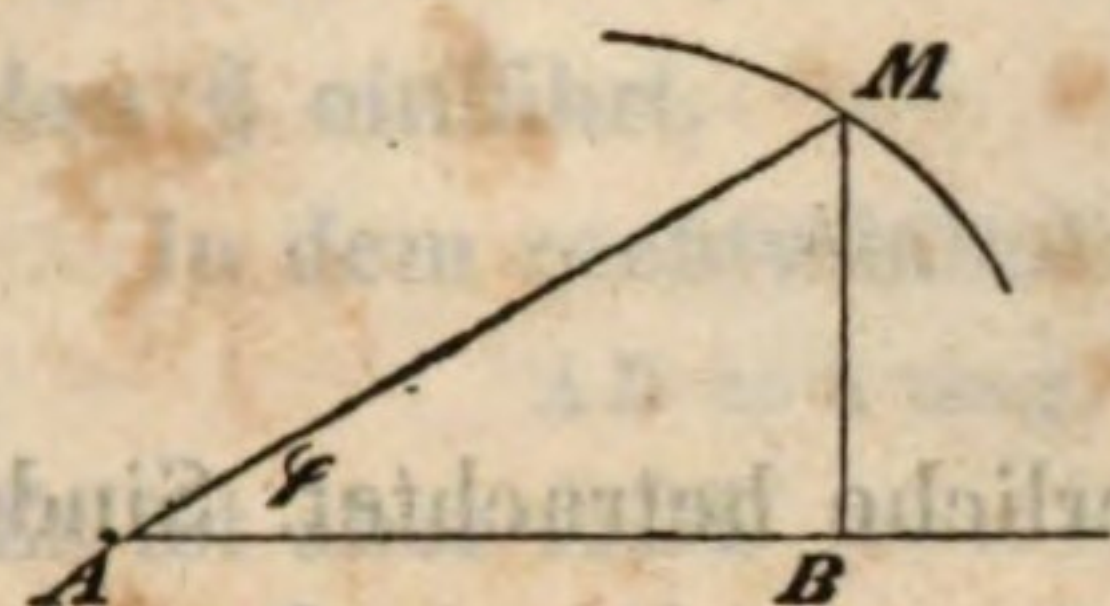
$$\frac{d\beta}{d\alpha} = - \frac{dx}{dy}.$$

Führt man diesen Werth in der Gleichung der Tangente der Evolute ein, so erhält man:

$$(y - \beta) = - (x - \alpha) \frac{dx}{dy}.$$

Dies ist aber nach §. 65 die Gleichung der im Punkte x, y Normalen. Die Tangente der Evolute ist daher eine Normale der Evolute.

73) Polar-Coordinaten. Die Lage eines Punktes M einer Curve kann auf zweierlei Art bestimmt werden, durch rechtwinkelige Ordinaten AB , BM , wie es bisher geschehen ist, oder durch Polar-Coordinaten, d. h. durch den Radius-Vector AM und den Winkel φ . Beide Coordinaten - Systeme hängen durch sehr einfache Gleichungen zusammen, durch welche rechtwinkelige Ordinaten in Polar-Coordinaten, und Polar-Coordinaten in rechtwinkelige transformirt werden können.



Es sei $AB = x$, $BM = y$, und $AM = u$. Es ist:

$$x = u \cos. \varphi, \quad y = u \sin. \varphi.$$

Sind die Eigenschaften einer Curve durch die Gleichung $F(x, y) = 0$, d. h. durch eine Gleichung unter rechtwinkeligen Ordinaten ausgedrückt, so hat man nur die eben erhaltenen Werthe von x und y einzuführen, um die Gleichung der Curve, in Polar-Coordinaten, ausgedrückt zu erhalten.

Aus den Gleichungen $x = u \cos. \varphi$, $y = u \sin. \varphi$ folgt

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \text{Arc.} \left(\text{tang.} = \frac{y}{x} \right).$$

Sind daher die Eigenschaften einer Curve durch die Gleichung $f(u, \varphi) = 0$ ausgedrückt, so erhält man die Gleichung der Curve, durch rechtwinkelige Ordinaten dargestellt, wenn die eben erhaltenen Werthe von u und φ in der Gleichung $f(u, \varphi) = 0$ eingeführt werden.

74) Krümmungshalbmesser ausgedrückt durch Polar-Coordinaten. Differentirt man die Gleichungen $x = u \cos. \varphi$, $y = u \sin. \varphi$, so erhält man:

$$\begin{aligned} dx &= \cos. \varphi \, du - u \sin. \varphi \, d\varphi \\ dy &= \sin. \varphi \, du + u \cos. \varphi \, d\varphi. \end{aligned}$$

Differentirt man Von Neuem, und betrachtet man zugleich φ als die unabhängig Veränderliche, so erhält man:

$$\begin{aligned} d^2x &= \cos. \varphi \, d^2u - 2 \sin. \varphi \, d\varphi \, du - u \cos. \varphi \, d\varphi^2 \\ d^2y &= \sin. \varphi \, d^2u + 2 \cos. \varphi \, d\varphi \, du - u \sin. \varphi \, d\varphi^2. \end{aligned}$$

Der Krümmungshalbmesser r in rechtwinkligen Ordinaten ausgedrückt ist nach §. 70:

$$r = \pm \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Hierin ist x als die unabhängig Veränderliche betrachtet. Sind aber x und y Functionen einer andern Grösse, die als die unabhängig Veränderliche auftritt, wie es hier wirklich der Fall ist, indem x, y Functionen von φ sind, so hat man nach §. 26 statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu setzen:

$$\frac{dx \, d^2y - dy \, d^2x}{dx^3}.$$

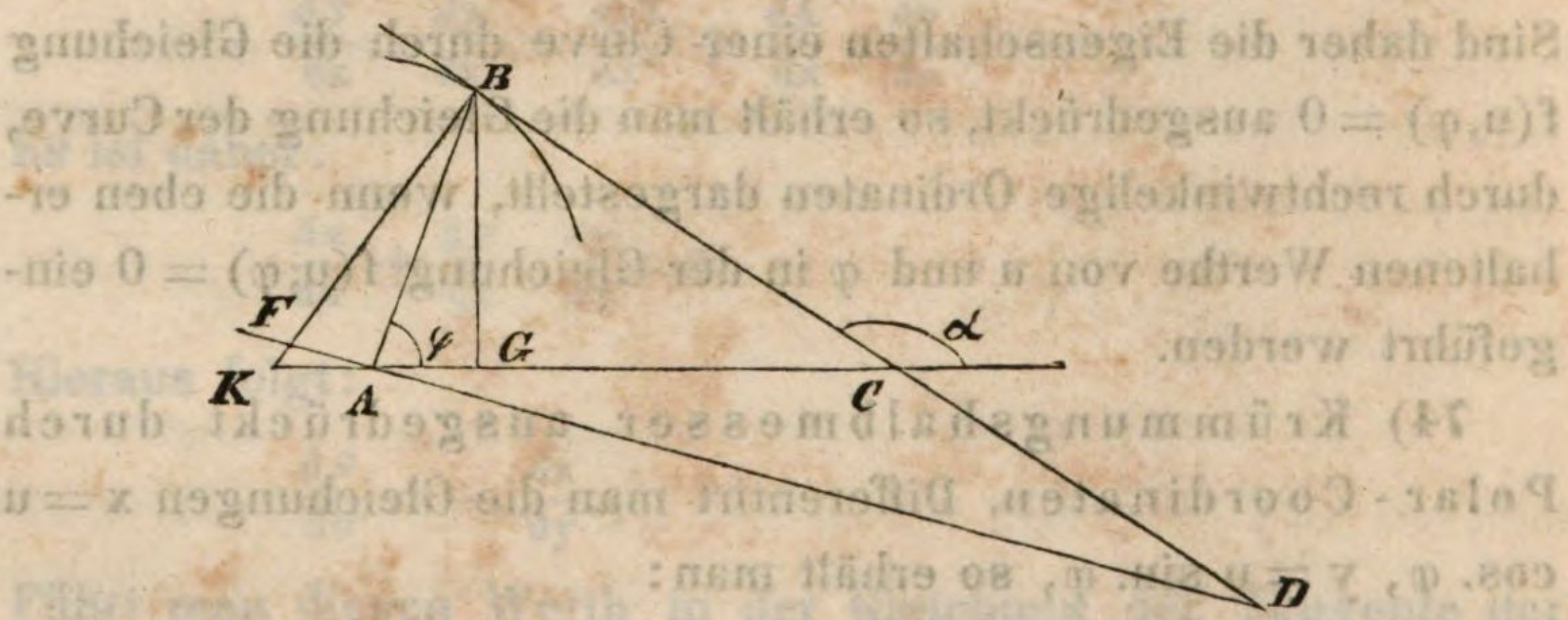
Es wird hierdurch:

$$r = \pm \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \, d^2y - dy \, d^2x}.$$

Führt man hierin die Werthe von dx, dy, d^2x, d^2y ein, so findet man nach einigen Reductionen

$$r = \pm \frac{(du^2 + u^2 d\varphi)^{\frac{3}{2}}}{2 d\varphi du^2 + u^2 d\varphi^3 - u d^2u d\varphi}.$$

75) Subtangente und Subnormale. Es sei B ein Punkt einer Curve, $AB = u$, und $CAB = \varphi$ seien die Polar-Coordina-



ten desselben, und $f(u, \varphi) = 0$ sei die Gleichung, welche die Eigenschaften der Curve ausdrückt. Zieht man in B eine Tangente BD , und durch A eine Linie FD senkrecht zu AB , so ist AD die Subtangente, und AF die Subnormale. Für rechtwinklige Ordinaten ist GC die Subtangente und GK die Subnormale. Es können daher die Subtangente und Subnormale, durch

Polar-Coordinaten ausgedrückt, nicht dadurch erhalten werden, dass man in den Gleichungen derselben, wie sie in §. 65 gefunden wurden, die Werthe von dx und dy des vorhergehenden § einführt.

In dem rechtwinkligen Dreieck DAB ist

$$AD = u \operatorname{tang.} ABD.$$

Es ist aber $ABD = \alpha - \varphi$, daher:

$$AD = u \operatorname{tang.} (\alpha - \varphi) = u \frac{\operatorname{tang.} \alpha - \operatorname{tg.} \varphi}{1 + \operatorname{tg.} \alpha \operatorname{tg.} \varphi}.$$

Bezeichnet man die rechtwinkligen Ordinaten AG , BG des Punktes B durch x , y , so ist nach §. 65 $\operatorname{tang.} \alpha = \frac{dy}{dx}$. Es wird hierdurch

$$AD = u \frac{\frac{dy}{dx} - \operatorname{tang.} \varphi}{1 + \frac{dy}{dx} \cdot \operatorname{tang.} \varphi}.$$

Führt man hierin die im vorhergehenden § gefundenen Werthe von dx und dy ein, findet man die Subtangente

$$AD = u^2 \frac{d\varphi}{du}.$$

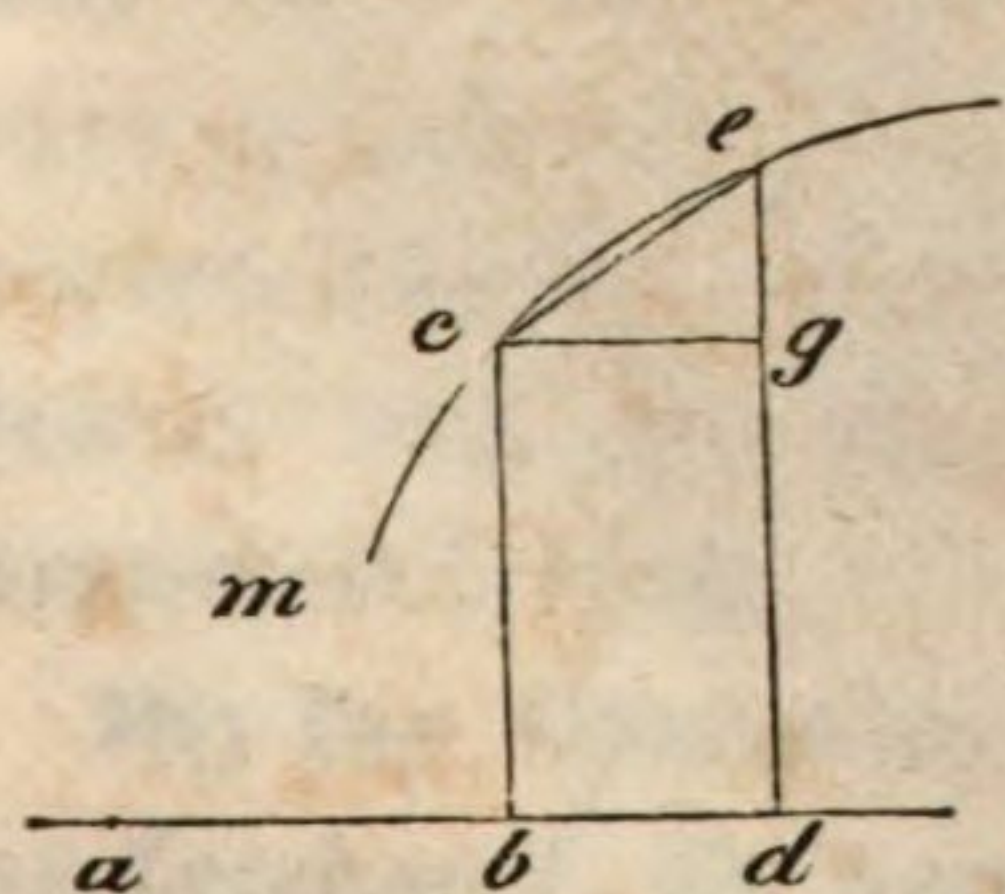
In dem rechtwinkligen Dreieck AFB ist:

$$\begin{aligned} AF &= u \operatorname{tg.} ABF = u \cot. ABD = u \cot. (\alpha - \varphi) \\ &= u \frac{1 + \operatorname{tg.} \alpha \operatorname{tg.} \varphi}{\operatorname{tg.} \alpha - \operatorname{tg.} \varphi}. \end{aligned}$$

Setzt man hierin $\operatorname{tang.} \alpha = \frac{dy}{dx}$, und für dx und dy die früher erhaltenen Werthe, so findet man die Subnormale

$$AF = \frac{du}{d\varphi}.$$

76) Differential des Bogens. Es sei mn ein Stück



einer Curve, deren Gleichung $y=f(x)$ ist. $ab = x$, $bc = y$ seien die Ordinaten eines beliebigen Punktes derselben. Wenn x um $bd = h$ zunimmt, so nimmt y um $eg = ed - bc = f(x+h) - f(x)$ zu. Es ist daher:

$$ce^2 = cg^2 + eg^2 = h^2 + (f(x+h) - f(x))^2$$

Hieraus erhält man:

$$\frac{ce^2}{h^2} = 1 + \frac{(f(x+h) - f(x))^2}{h^2}.$$

Da h die Zunahme von x oder gleich Δx , und $f(x+h) - f(x)$ die Zunahme von y oder gleich Δy ist, so hat man:

$$\frac{ce^2}{\Delta x^2} = 1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}.$$

In dem speciellen Falle, in welchem h verschwindend klein oder Null wird, geht Δx in dx und Δy in dy über, und die verschwindend kleine Sehne ce fällt mit dem Bogen zusammen. Bezeichnet s den Bogen mc , und Δs die Zunahme ce des Bogens, die der Zunahme $bd = \Delta x$ entspricht, so ist ds der der Zunahme dx entsprechende Bogen. Man hat daher:

$$\frac{ds^2}{dx^2} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2}.$$

Hieraus folgt:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Um das Differential des Bogens in Polar-Coordinationen auszudrücken, hat man nur die in §. 74 erhaltenen Werthe von dx und dy einzuführen. Man erhält hierdurch:

$$ds = \sqrt{du^2 + u^2 d\varphi^2}.$$

78) Differential des Bogens. Es sei an ein Stück einer Curve, deren Gleichung $y=f(x)$ ist. $ab = x$, $ac = y$ seien die Ordinaten eines beliebigen Punktes derselben. Wenn x um dx zunimmt, so nimmt y um $dy = f'(x)dx$ zu. Es ist dann die Subnormale ab die Subtangente ac und bc die Subnormale, durch

Integral - Rechnung.

Einleitung.

77) Die Integralrechnung macht es sich zur Aufgabe: aus einer gegebenen Relation der Differentialien einer oder mehrerer veränderlicher Grössen jene Function der Veränderlichen zu bestimmen, durch deren Differentiation die gegebene Relation entstanden ist oder doch entstanden gedacht werden kann.

Die Integralrechnung ist hiernach eine der Differentialrechnung entgegengesetzte Rechnungsoperation, und steht ihr in ähnlicher Weise gegenüber wie die Division der Multiplication, wie das Wurzelausziehen dem Potenzenheben; u. s. w. So wie nun die Division zum Begriff der Brüche, und das Wurzelausziehen zum Begriff der irrationalen Grössen führt, so führt die Integralrechnung zu einer besonderen Gattung transcendeter Grössen, die sie in dem Falle erzeugt, in welchem das Integral nicht in begrenzter Form gegeben werden kann.

Da es keinen Algorithmus der Integralrechnung giebt, d. h. da man die Idee des Integrirens nicht wie die des Differentirens auf einige einfache Operationen zurückführen kann, so kann auch nicht behauptet werden, dass das Integral einer jeden gegebenen Relation von Differentialien müsse bestimmt werden können. Ebenso zeigt der wirkliche Versuch, dass bei weitem von den wenigsten Differentialformeln die Integrale herzustellen sind.

78) Die Operation des Integrirens wird angedeutet durch das Zeichen $\int$. Es bezeichnet demnach $\int f(x)dx$ jene Function von x , deren Differential $f(x)dx$ ist. Man nennt eben diese

Function das Integral von $f(x)dx$. Da das Integriren dem Differentiren entgegengesetzt ist, so hebt das Integralzeichen die Wirkung des Differentialzeichens auf, so dass man hat $\int d.F(x) = F(x)$. Würde man an der in der Mathematik sonst üblichen Zeichensprache festhalten, so wäre die Operation des Integrirens durch d^{-1} anzuzeigen, man hat aber von vorn herein das Summenzeichen $\int$ gewählt, indem man in dem Sinn der Methode des unendlich Kleinen das Integral als eine Summe unendlich kleiner Grössen betrachtete.

Da im Allgemeinen $dF(x) = \varphi(x)dx$ und $d(F(x) + A) = \varphi(x)dx$, so ist

$$\int \varphi(x)dx = F(x) \text{ und } \int \varphi(x)dx = F(x) + A.$$

Für A kann jede beliebige constante Grösse gesetzt werden, es entspricht daher eine jede Differentialformel unzählig vielen Integralfunctionen. Die Integralrechnung lässt den Werth der Constanten A völlig unbestimmt, wenn daher nicht aus der Natur eines vorgelegten Problemes der Werth derselben abgeleitet werden kann, so tritt durch die Integration eine unbestimmte Constante in der Rechnung auf. Gewöhnlich bezeichnet man dieselbe durch C , und schreibt

$$\int (\varphi x) dx = F(x) + C.$$

In dieser Form wird das Integral ein unbestimmtes genannt.

Wenn bekannt ist, dass durch $x=a$ das Integral verschwindet, so hat man

$$0 = F(a) + C.$$

Daher $C = -F(a)$, und

$$\int \varphi(x) dx = F(x) - F(a).$$

Ein solches Integral wird ein partikulares genannt.

Setzt man $x=b$, so erhält man:

$$\int \varphi(x) dx = F(b) - F(a).$$

Man sagt dann, man habe das Integral von a bis b genommen, und bezeichnet dies nach dem Vorgang von Fourier in folgender Weise

$$\int_a^b \varphi(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ein solches Integral heisst ein bestimmtes.

79) Da es keine Methode giebt, nach welcher die Integrale aller Differentialformeln bestimmt werden können, so ist es zweckmässig um eine Einsicht in das zu erreichen, was die Integralrechnung leistet, die Differentialformeln in Klassen abzutheilen und nachzuweisen in wie weit es gelungen ist, die Integrale der einzelnen Klassen herzustellen.

Es bieten sich hier leicht folgende vier Hauptabtheilungen dar:

- 1) Differentialformeln des ersten Grades und einer unabhängig Veränderlichen,
- 2) Differentialformeln des zweiten Grades und höherer Grade mit einer unabhängig Veränderlichen,
- 3) Differentialformeln des ersten Grades und mehrerer unabhängig Veränderlichen,
- 4) Differentialformeln des zweiten Grades und höherer Grade mit mehreren unabhängig Veränderlichen.

Erste Abtheilung.

Integration der Differentialformeln des ersten Grades und einer unabhängig Veränderlichen.

Erster Abschnitt.

Unbestimmte Integrale.

80) Die allgemeinsten Formeln der Differentialrechnung geben durch Umkehrung auch die Grundformeln der Integralrechnung. So wurde früher gezeigt dass $d \cdot aF(x) = a \cdot \frac{dF(x)}{dx} dx$, es ist daher auch

$$60) aF(x) = \int a \cdot \frac{dF(x)}{dx} dx = a \int \frac{dF(x)}{dx} dx.$$

Der constante Factor a ist daher ungeändert vor das Integralzeichen zu stellen.

Da $d(F(x) \pm f(x)) = \frac{dF(x)}{dx} dx \pm \frac{df(x)}{dx} dx$, so ist auch

$$61) \int (F(x) \pm f(x)) dx = \int \left(\frac{dF(x)}{dx} dx \pm \frac{df(x)}{dx} dx \right) = \int \frac{dF(x)}{dx} dx \pm \int \frac{df(x)}{dx} dx.$$

Das Integral einer Summe oder eines Unterschiedes ist daher gleich der Summe oder dem Unterschiede der Integrale der Theile.

Nach No. 36 ist:

$$dff_1(x) = \frac{dff_1(x)}{df_1(x)} \cdot \frac{df_1(x)}{dx} \cdot dx.$$

Es ist daher:

$$62) \int f f_1(x) dx = \int \frac{dff_1(x)}{df_1(x)} \cdot \frac{df_1(x)}{dx} \cdot dx.$$

Setzt man $z = f_1(x)$, so ist $dz = \frac{df_1(x)}{dx} \cdot dx$. Da $\frac{dff_1(x)}{df_1(x)}$ gleich einer Function von $f_1(x)$ ist, so kann man setzen $\frac{dff_1(x)}{df_1(x)} = F f_1(x) = F(z)$, und man erhält:

$$63) \int \frac{dff_1(x)}{df_1(x)} \cdot \frac{df_1(x)}{dx} \cdot dx = \int F(z) \cdot dz.$$

Durch diese Gleichung wird eine zusammengesetztere Integralformel auf eine einfachere zurückgeführt.

Um zu erkennen, in wie weit die Differentialformeln des ersten Grades und einer veränderlichen Grösse integrabel sind, ist es nöthig eine Eintheilung zu suchen, die einerseits alle denkbaren Differentialformeln umfasst, und die andererseits so beschaffen ist, dass wenn das Integral für einen die Abtheilung charakterisirenden Fall aufzufinden ist, hiermit zugleich beauptet werden kann, dass alle in dieselbe Abtheilung gehörigen Differentialformeln als integrabel zu betrachten seien. Hierzu genügt eine auf den Charakter der mit dx verbundenen Function basirte Eintheilung. Man kann in dieser Beziehung unterscheiden:

- 1) rationale ganze algebraische Differentialformeln,
- 2) rationale gebrochene algebraische Differentialformeln,
- 3) irrationale algebraische Differentialformeln,
- 4) transcendente Differentialformeln.

Wenn man die Differentialformel im Allgemeinen durch $f(x)dx$ bezeichnet, so kommt es also wesentlich auf die Beschaffenheit von $f(x)$ an.

81) Integration ganzer algebraischer Differentialformeln. Es wird hier, wie bei allen späteren Untersuchungen, stets von den einfachsten Fällen ausgegangen. Sie finden ihre Erledigung dadurch, dass man unmittelbar auf die Differentialrechnung zurückgeht. Bei den zusammengesetzten Formeln geht das Bestreben dahin, dieselben auf die einfacheren schon aufgelösten Fälle zurückzuführen.

Eine der einfachsten Formeln ist $x^n dx$. Da $dx^{n+1} = (n+1)x^n dx$ ist, so hat man $x^n dx = d \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Es ist daher:

$$64) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Da es gleichgültig ist ob n eine positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl ist, so umfasst dieser Fall auch die einfachsten gebrochenen und irrationalen Formeln.

Der specielle Fall, in welchem $n = -1$ wird, führt zu einem unbestimmten Ausdruck. Da aber $d \log. x = x^{-1} dx$, so ist:

$$65) \int x^{-1} dx = \log. x + C.$$

Hat die zu integrierende Differentialformel folgende allgemeine Form:

$$(ax^m \pm bx^n \pm cx^p \pm \dots) dx,$$

so hat man nach No. 60 und 61:

$$\int (ax^m + bx^n + cx^p + \dots) dx = a \int x^m dx + b \int x^n dx + c \int x^p dx + \dots$$

Wenn die Differentialformeln Factoren enthält, so ist zuerst die Multiplication und dann die Integration auszuführen. Es sei z. B. das Integral von $(ax^n + b)(x^m + cx^p) dx$ zu bestimmen. Es ist:

$$(ax^n + b)(x^m + cx^p) dx = (ax^{n+m} + bx^m + cx^{n+p} + bcx^p) dx.$$

Man hat daher:

$$\begin{aligned} \int (ax^n + b)(x^m + cx^p) dx &= a \frac{x^{n+m+1}}{n+m+1} + b \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \frac{x^{n+p+1}}{n+p+1} \\ &+ bc \frac{x^{p+1}}{p+1} + C. \end{aligned}$$

In einigen Fällen ist ein kürzeres Verfahren möglich. Gesetzt es sei das Integral von $(a + 5x^2 + x^3)^m (10x + 3x^2) dx$ zu bestimmen. Setzt man:

$$a + 5x^2 + x^3 = z,$$

$$\text{so ist } (10x + 3x^2) dx = dz.$$

Es ist daher:

$$\int (a + 5x^2 + x^3)^m (10x + 3x^2) dx = \int z^m dz = \frac{z^{m+1}}{m+1} + C.$$

Führt man den Werth von z wieder ein, so findet man:

$$\int (a + 5x^2 + x^3)^m (10x + 3x^2) dx = \frac{(a + 5x^2 + x^3)^{m+1}}{m+1} + C.$$

Im Allgemeinen sind die Fälle, die ein kürzeres Verfahren zulassen, jene die durch die Gleichung No. 63 angezeigt sind.

82) Integration gebrochener algebraischer Differentialformeln. Der allgemeinste Ausdruck einer rationalen gebrochenen Differentialformel ist:

$$\frac{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots}{x^{n+1} + Ax^n + Bx^{n-1} + \dots} dx.$$

Aus der Analysis ist bekannt, dass jede Reihe $x^{n+1} + Ax^n + Bx^{n-1} + \dots$ sich in $n+1$ Faktoren von der Form $\alpha + x$ oder von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1} + x$ zerlegen lasse, und dass, wenn imaginäre Faktoren von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1} + x$ vorkommen, diese stets in einer geraden Anzahl auftreten, und zwar so, dass sich dieselben paarweise in der Art ordnen lassen, dass das Produkt von je zweien reel und von der Form $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$ ist. Ferner lehrt die Analysis, dass jeder Bruch, dessen Nenner aus Faktoren besteht, sich in eben so viele Partialbrüche, als Faktoren vorhanden sind, zerlegen lasse. Die Form derselben ist bei reellen einfachen Faktoren:

$$\frac{A}{\alpha + x},$$

bei mehreren gleichen reellen Faktoren:

$$\frac{A}{(\alpha + x)^n}.$$

Bei doppelten reellen Faktoren, die das Produkt zweier imaginären Faktoren ausdrücken, ist die Form der Partialbrüche:

und endlich bei mehreren gleichen doppelten Faktoren ist die Form der Partialbrüche:

$$\frac{A + Bx}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2},$$

$$\frac{A + Bx}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^n}.$$

Es geht hieraus hervor, dass das Integral einer jeden gebrochenen rationalen Differentialformel bestimmt werden kann, wenn es gelingt die Integrale folgender Differentialformeln:

$$\frac{A}{\alpha + x} \cdot dx, \frac{A}{(\alpha + x)^n} \cdot dx, \frac{A + Bx}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2} \cdot dx, \frac{A + Bx}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^n} \cdot dx$$

herzustellen. Bevor indess zur Integration dieser Formeln geschritten wird, soll an einer Reihe von Beispielen die Zerlegung in Partialbrüche näher erörtert werden.

83) 1tes Beispiel. Der Bruch $\frac{4 + x^2}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$ ist gegeben. Man soll denselben in Partialbrüche zerlegen.

Es ist:
$$\frac{4 + x^2}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} = \frac{4 + x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Setzt man: $\frac{4 + x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$, und bringt man die Partialbrüche unter gleiche Benennung, so findet man:

$$\begin{aligned} \frac{4 + x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ = \frac{Ax^2 + 5Ax + A6 + Bx^2 + 4Bx + B3 + Cx^2 + 3Cx + C2}{(x+1)(x+2)(x+3)}. \end{aligned}$$

Setzt man die Vorzahlen gleicher Potenzen von x auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich, so erhält man folgende Gleichungen:

$$A + B + C = 1$$

$$5A + 4B + 3C = 0$$

$$6A + 3B + 2C = 4.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$A = \frac{5}{2}, B = -8, C = \frac{13}{2}.$$

Es ist daher:

$$\frac{4 + x^2}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} = \frac{\frac{5}{2}}{x+1} - \frac{8}{x+2} + \frac{\frac{13}{2}}{x+3}.$$

Die Zahl der Faktoren des Nenners hat auf die Art der Bestimmung der Zähler der Partialbrüche keinen Einfluss, es bleibt daher die eben erörterte Methode für jede beliebige Zahl von Faktoren anwendbar.

2tes Beispiel. Es ist der Bruch $\frac{2+4x^2}{(2+x)^3(4+x)}$ gegeben. Man soll denselben in Partialbrüche zerlegen.

Man setze:

$$\frac{2+4x^2}{(2+x)^3(4+x)} = \frac{A}{(2+x)^3} + \frac{B}{(2+x)^2} + \frac{C}{2+x} + \frac{D}{4+x}.$$

Bringt man die Partialbrüche unter gleiche Benennung, so erhält man:

$$\frac{2+4x^2}{(2+x)^3(4+x)} = \left\{ \begin{array}{l} 4A + 8B + 16C + 8D \\ Ax + 6Bx + 20Cx + 12Dx \\ Bx^2 + 8Cx^2 + 6Dx^2 \\ Cx^3 + Dx^3 \end{array} \right\} : (2+x)^3(4+x).$$

Man erhält hieraus folgende Gleichungen:

$$2 = 4A + 8B + 16C + 8D$$

$$0 = A + 6B + 20C + 12D$$

$$4 = B + 8C + 6D$$

$$0 = C + D.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$A = -14, B = -1, C = \frac{3}{2}, D = -\frac{3}{2}.$$

Es ist daher:

$$\frac{2+4x^2}{(2+x)^3(4+x)} = -\frac{14}{(2+x)^3} - \frac{1}{(2+x)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{2+x} - \frac{\frac{3}{2}}{4+x}.$$

3tes Beispiel. Es ist die gebrochene Function

$$\frac{6x+2x^2}{(x^2+4x+8)(2+x)}$$

gegeben. Man soll dieselbe in Partialbrüche zerlegen.

Durch Zerlegung des Trinomiums $x^2 + 4x + 8$ in einfache Faktoren erhält man imaginäre Faktoren, es ist nämlich $x^2 + 4x + 8 = [x + 2(1 - \sqrt{-1})][x + 2(1 + \sqrt{-1})]$. Sollen diese imaginären Faktoren als solche nicht in den Partialbrüchen erscheinen, so lässt man das Trinomium ungeändert und zerlegt wie folgt:

$$\frac{6x + 2x^2}{(x^2 + 4x + 8)(2 + x)} = \frac{A + Bx}{x^2 + 4x + 8} + \frac{C}{2 + x}.$$

Bringt man die Brüche unter gleiche Benennung, so erhält man:

$$\frac{6x + 2x^2}{(x^2 + 4x + 8)(2 + x)} = \frac{2A + 2Bx + Ax + Bx^2 + Cx^2 + 4Cx + 8C}{(x^2 + 4x + 8)(2 + x)}.$$

Durch Gleichsetzung der Vorzahlen gleicher Potenzen von x erhält man folgende Gleichungen:

$$0 = 2A + 8C$$

$$6 = A + 2B + 4C$$

$$2 = B + C.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$A = 4, B = 3, C = -1.$$

Es ist daher:

$$\frac{6x + 2x^2}{(x^2 + 4x + 8)(2 + x)} = \frac{4 + 3x}{x^2 + 4x + 8} - \frac{1}{2 + x}.$$

4tes Beispiel. Die gebrochene Function $\frac{4x + 6x^3}{(x^2 + 2x + 6)^2(4 + x)}$ ist gegeben. Man soll dieselbe in Partialbrüche zerlegen.

Durch Vergleichung des Trinomiums $x^2 + 2x + 6$ mit der Form der doppelten imaginären Faktoren $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$ findet man $\alpha = 1, \beta = \pm \sqrt{5}$. Es ist daher $x^2 + 2x + 6$ das Produkt zweier imaginärer Faktoren. Man lässt daher das Trinomium ungeändert und zerlegt den gegebenen Bruch in folgender Weise:

$$\frac{4x + 6x^3}{(x^2 + 2x + 6)^2(4 + x)} = \frac{A + Bx}{(x^2 + 2x + 6)^2} + \frac{C + Dx}{x^2 + 2x + 6} + \frac{E}{4 + x}.$$

Bringt man die Partialbrüche unter gleiche Benennung, so findet man:

$$\frac{4x + 6x^3}{(x^2 + 2x + 6)^2(4 + x)} = \left\{ \begin{array}{l} 4A + 4Bx + Ax + Bx^2 + \\ 24C + 24Cx + 6Cx^2 + Cx^3 + \\ 24Dx + 14Dx^2 + 6Dx^3 + Dx^4 + \\ 36E + 12Ex + 10Ex^2 + 2Ex^3 + Ex^4 \end{array} \right\} : (x^2 + 2x + 6)^2(4 + x).$$

Man erhält hieraus, wenn man die Vorzahlen gleicher Potenzen von x einander gleich setzt, folgende Gleichungen:

$$0 = 4A + 24C + 36E$$

$$4 = A + 4B + 14C + 24D + 12E$$

$$0 = B + 6C + 14D + 10E$$

$$6 = C + 6D + 2E$$

$$0 = D + E.$$

Hieraus folgt:

$$A = \frac{6554}{335}, B = -\frac{2274}{201}, C = \frac{1068}{1005}, D = \frac{2481}{2010}, E = -\frac{2481}{2010}.$$

Es ist daher:

$$\frac{4x + 6x^3}{(x^2 + 2x + 6)^2(4 + x)} = \frac{\frac{6554}{335} - \frac{2274}{201}x}{(x^2 + 2x + 6)^2} + \frac{\frac{1068}{1005} + \frac{2481}{2010}x}{x^2 + 2x + 6} - \frac{\frac{2481}{2010}}{4 + x}.$$

84) Die oben entwickelte Methode der Zerlegung in Partialbrüche führt namentlich in den Fällen, in welchen eine grössere Zahl gleicher Faktoren vorkommen, zu weitläufigen Rechnungen. Es soll daher noch eine andere auf die Anwendung der Differentialrechnung sich gründende Methode entwickelt werden, die in manchen Fällen auf kürzerem Wege zum Ziele führt. Es wurde dieselbe von Euler im letzten Kapitel seiner Differentialrechnung aufgestellt.

Es sind hier dieselben Fälle, wie im vorhergehenden § zu unterscheiden. Es sei $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ der zu zerlegende Bruch, und $\varphi(x)$ sei das Produkt ungleicher reeller Faktoren von der Form $\alpha + x$, $\beta + x$, ... so dass man hat $\varphi(x) = (\alpha + x)(\beta + x)(\gamma + x) \dots$. Endlich seien A, B, C... die Zähler der Partialbrüche. Man hat hiernach:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{\alpha + x} + \frac{B}{\beta + x} + \frac{C}{\gamma + x} + \dots$$

Hieraus folgt:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}(\alpha + x) = A + B \frac{\alpha + x}{\beta + x} + C \frac{\alpha + x}{\gamma + x} + \dots$$

Setzt man $x = -\alpha$, so wird $\alpha + x = 0$ und $\varphi(x) = 0$, und man erhält:

$$f(-\alpha) \frac{0}{0} = A.$$

Bringt man die im sechsten Abschnitt gegebenen Lehren zur Bestimmung von $\frac{0}{0}$ in Anwendung, so findet man:

$$A = f(-\alpha) \left(\frac{1}{\frac{d\varphi(x)}{dx}} \right)_{x=-\alpha}.$$

In ähnlicher Weise findet man zur Bestimmung von B

$$B = f(-\beta) \left(\frac{1}{\frac{d\varphi(x)}{dx}} \right)_{x=-\beta}$$

u. s. w.

Sollte z. B. der Zähler des Partialbruches bestimmt werden, der dem Faktor $1-x$ im Nenner des Bruches $\frac{x^5}{1-x^8}$ entspricht, so hat man $f(x) = x^5$, $\varphi(x) = 1-x^8$, $\frac{d\varphi(x)}{dx} = -8x^7$ und $\alpha = -1$, daher:

$$A = -\frac{1}{8}.$$

Enthält zweitens $\varphi(x)$ mehrere gleiche Faktoren, so dass $\varphi(x) = (\alpha+x)^n Q$, so kann man setzen:

$$\frac{f(x)}{(\alpha+x)^n Q} = \frac{A}{(\alpha+x)^n} + \frac{B}{(\alpha+x)^{n-1}} + \frac{C}{(\alpha+x)^{n-2}} + \dots + \frac{P}{Q},$$

wo P und Q Functionen von x bezeichnen. Man erhält hieraus:

$$a) \frac{f(x)}{Q} = A + B(\alpha+x) + C(\alpha+x)^2 + \dots + \frac{P}{Q}(\alpha+x)^n.$$

Setzt man $x = -\alpha$, so erhält man:

$$A = \left(\frac{f(x)}{Q} \right)_{x=-\alpha}.$$

Differentirt man die Gleichung (a), so findet man:

$$\frac{d \frac{f(x)}{Q}}{dx} = B + 2C(\alpha+x) + \dots + n \frac{P}{Q}(\alpha+x)^{n-1} + \frac{d \frac{P}{Q}}{dx} \cdot (\alpha+x)^n.$$

Setzt man wieder $x = -\alpha$, so findet man:

$$B = \left(\frac{d \frac{f(x)}{Q}}{dx} \right)_{x=-\alpha}.$$

Fährt man auf ähnliche Weise fort, so erhält man:

$$C = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d^2 \frac{f(x)}{Q}}{dx^2} \right)_{x=-\alpha}, \quad D = \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{d^3 \frac{f(x)}{Q}}{dx^3} \right)_{x=-\alpha}, \dots$$

Enthält drittens $\varphi(x)$ einen doppelten imaginären Faktor oder einen Faktor von der Form $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, so dass man hat $\varphi(x) = (x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2) \cdot Q$, so kann man setzen:

$$\frac{f(x)}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2) Q} = \frac{A + Bx}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2} + \frac{P}{Q}$$

wo P und Q Functionen von x sind. Man erhält hieraus:

$$\frac{f(x)}{Q} = A + Bx + \frac{P}{Q} (x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2).$$

Setzt man hierin $x = -\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, so erhält man:

$$\left(\frac{f(x)}{Q} \right)_{x=-\alpha \pm \beta \sqrt{-1}} = A + B(-\alpha \pm \beta \sqrt{-1}).$$

Diese Gleichung lässt sich immer in die Form $F + G\sqrt{-1}$ bringen. Es folgt aber hieraus $F = 0$ und $G = 0$, so dass man immer zwei Gleichungen erhält, durch deren Auflösung die Werthe von A und B zu bestimmen sind.

Enthält endlich $\varphi(x)$ mehrere gleiche Faktoren von der Form $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, so dass man hat $\varphi(x) = (x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^n Q$, so kann man setzen:

$$\frac{f(x)}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^n Q} = \frac{A + Bx}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^n} + \frac{A_1 + B_1 x}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^{n-1}} + \dots + \frac{P}{Q},$$

wo P und Q Functionen von x sind. Man erhält hieraus:

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{f(x)}{Q} &= (A + Bx) + (A_1 + B_1 x) (x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2) + \dots \\ &+ \frac{P}{Q} (x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^n. \end{aligned}$$

Setzt man $x = -\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, so erhält man;

$$\left(\frac{f(x)}{Q} \right)_{x=-\alpha \pm \beta \sqrt{-1}} = A + B(-\alpha \pm \beta \sqrt{-1}).$$

Welche Gleichung, wie in dem vorhergehenden Falle die Form $F + G\sqrt{-1} = 0$ besitzt, und daher zu den Gleichungen $F = 0$, $G = 0$ führt, durch deren Auflösung die Werthe von A und B erhalten werden.

Differentirt man die Gleichung (b), und setzt man darauf $x = -\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, so erhält man:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{Q} \right) \right]_{x=-\alpha \pm \beta \sqrt{-1}} &= \\ \left[\frac{d}{dx} \left(A + Bx + (A_1 + B_1 x) (x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2) \right) \right]_{x=-\alpha \pm \beta \sqrt{-1}} &= 0. \end{aligned}$$

Auch diese Gleichung kann in die Form $F + G\sqrt{-1} = 0$ gebracht werden, woraus also wieder zwei Gleichungen $F = 0$ und $G = 0$ hervorgehen, die zur Bestimmung der Werthe von A_1 und B_1 genügen.

Es ist hiermit der Weg angezeigt, der zu verfolgen ist, um die Werthe von A_2, B_2, A_3, B_3 , u. s. w. zu bestimmen.

85) Die Integration einer gebrochenen Differentialformel wird, wenn man die gebrochene Function in Partialbrüche nach der in den vorhergehenden §§ angegebene Art zerlegt, auf die Integration folgender Differentialformeln zurückgeführt:

$$\frac{A}{\alpha+x} dx, \frac{A}{(\alpha+x)^n} dx, \frac{A+Bx}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} dx, \frac{A+Bx}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n} dx.$$

I. Das Integral der ersten dieser Formeln ergibt sich aus No. 65. Setzt man dort $\alpha+x$ statt x , so erhält man $\int \frac{dx}{\alpha+x} = \lg. (\alpha+x) + C$, es ist daher:

$$66) \int \frac{A dx}{\alpha+x} = A \lg. (\alpha+x) + C.$$

Setzt man $-x$ statt x , daher auch $-dx$ statt dx , so findet man:

$$67) \int \frac{A dx}{\alpha-x} = -A \lg. (\alpha-x) + C.$$

II. Zur Bestimmung des Integrals von $\frac{A}{(\alpha+x)^n} dx$ setze man $\alpha+x=y$, also auch $dx=dy$. Man erhält:

$$\frac{A}{(\alpha+x)^n} dx = A y^{-n} dy.$$

Es ist aber nach No. 64

$$\int A y^{-n} dy = A \frac{y^{-n+1}}{-n+1} + C.$$

Führt man den Werth von y wieder ein, so erhält man:

$$68) \int \frac{A}{(\alpha+x)^n} dx = \frac{A}{1-n} \cdot \frac{1}{(\alpha+x)^{n-1}} + C.$$

III. Das Integral der dritten der aufgestellten Formeln wird auf folgende Weise gefunden. Es ist:

$$\int \frac{A+Bx}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} dx = \int \frac{A+Bx}{(x+\alpha)^2+\beta^2} dx.$$

Setzt man $x+\alpha=y$, also $x=y-\alpha$ und $dx=dy$, so erhält man:

$$\begin{aligned} \int \frac{A+Bx}{(x+\alpha)^2+\beta^2} dx &= \int \frac{A+B(y-\alpha)}{y^2+\beta^2} dy \\ &= (A-\alpha B) \int \frac{dy}{y^2+\beta^2} + B \int \frac{y dy}{y^2+\beta^2}. \end{aligned}$$

Es ist hierdurch das zusammengesetztere Integral auf zwei einfachere zurückgebracht. Das erste derselben ergibt sich aus der Formel No. 32, denn setzt man dort $\frac{y}{\beta}$ statt x , so erhält man:

$$d \text{ Arc. } \left(\text{tg.} = \frac{y}{\beta} \right) = \frac{\beta dy}{y^2 + \beta^2}.$$

Es ist daher:

$$69) \int \frac{dy}{y^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta} \text{ Arc. } \left(\text{tg.} = \frac{y}{\beta} \right) + C.$$

Das zweite ergibt sich aus der Formel No. 23, denn setzt man in derselben $x = y^2 + \beta^2$, so erhält man:

$$d \lg. (y^2 + \beta^2) = \frac{2y dy}{y^2 + \beta^2}.$$

Es ist daher:

$$\int \frac{y dy}{y^2 + \beta^2} = \frac{1}{2} \lg. (y^2 + \beta^2) + C.$$

Führt man die Werthe der eben gefundenen Integrale ein, so erhält man:

$$\int \frac{A + B(y - \alpha)}{y^2 + \beta^2} dy = \frac{(A - \alpha B)}{\beta} \text{ Arc. } \left(\text{tg.} = \frac{y}{\beta} \right) + \frac{B}{2} \lg. (y^2 + \beta^2) + C.$$

Setzt man hierin für y wieder seinen Werth $x + \alpha$, so hat man:

$$70) \int \frac{A + Bx}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2} dx = \frac{A - \alpha B}{\beta} \text{ Arc. } \left(\text{tg.} = \frac{x + \alpha}{\beta} \right) + \frac{B}{2} \lg. [(x + \alpha)^2 + \beta^2] + C.$$

IV. Es ist endlich der vierte Fall zu untersuchen, oder das Integral von $\frac{A + Bx}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^n} \cdot dx$ zu bestimmen.

Setzt man $x + \alpha = y$, also auch $dx = dy$, so hat man wie in III

$$\int \frac{A + Bx}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^n} dx = (A - \alpha B) \int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^n} + B \int \frac{y dy}{(y^2 + \beta^2)^n}.$$

Das letzte dieser Integrale ergibt sich aus der Formel No. 21. Denn setzt man in derselben $y^2 + \beta^2$ statt x , und $-n + 1$ statt n , so erhält man:

$$d. (y^2 + \beta^2)^{-n+1} = (-n+1) (y^2 + \beta^2)^{-n} 2y dy.$$

Es folgt hieraus:

$$\int \frac{y dy}{(y^2 + \beta^2)^n} = \frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(y^2 + \beta^2)^{n-1}} + C.$$

Es ist noch übrig das Integral von $\frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^n}$ zu bestimmen. Es kann die Aufgabe als gelöst betrachtet werden, wenn es gelingt $\int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^n}$ auf $\int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^{n-1}}$ zurückzuführen. Denn fährt man so fort, so kann auch $\int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^{n-1}}$ durch $\int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^{n-2}}$ ausgedrückt werden, und man wird endlich durch weiteres Zurückführen auf das Integral $\int \frac{dy}{y^2 + \beta^2}$ kommen, welches nach III schon bekannt und gleich $\frac{1}{\beta} \text{Arc.} \left(\text{tg.} = \frac{y}{\beta} \right)$ ist.

Dieses Zurückführen von $\int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^n}$ auf $\int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^{n-1}}$ lässt sich durch eine Methode bewerkstelligen, die überhaupt in der Integralrechnung von häufiger Anwendung ist, und das theilweise Integriren genannt wird. Sie gründet sich, wie alle Methoden des Integrirens auf einen Satz der Differentialrechnung. Sind nämlich u und z Functionen von x , so hat man:

$$d(u \cdot z) = u dz + z du.$$

Es ist daher:

$$71) \quad \int u dz = uz - \int z du.$$

Geht man nun endlich zur Bestimmung von $\int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^n}$ über. Es ist:

$$m) \quad \int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^n} = \int \frac{y^2 + \beta^2}{(y^2 + \beta^2)^{n+1}} dy = \int \frac{y^2 dy}{(y^2 + \beta^2)^{n+1}} + \int \frac{\beta^2 dy}{(y^2 + \beta^2)^{n+1}}.$$

Es ist aber:

$$\frac{y^2 dy}{(y^2 + \beta^2)^{n+1}} = y \cdot d \left(-\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{(y^2 + \beta^2)^n} \right).$$

Setzt man in No. 71. $u = y$, $z = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{(y^2 + \beta^2)^n}$, so erhält

man $\int y \cdot d \left(-\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{(y^2 + \beta^2)^n} \right)$ oder:

$$\int \frac{y^2 dy}{(y^2 + \beta^2)^{n+1}} = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{y}{(y^2 + \beta^2)^n} + \frac{1}{2n} \int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^n}.$$

Führt man diesen Werth in der Gleichung (m) ein, so hat man:

$$\int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^n} = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{y}{(y^2 + \beta^2)^n} + \frac{1}{2n} \int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^n} + \int \frac{\beta^2 dy}{(y^2 + \beta^2)^{n+1}}.$$

Hieraus folgt:

$$\int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^{n+1}} = \frac{1}{2n\beta^2} \cdot \frac{y}{(y^2 + \beta^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{\beta^2} \int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^n}.$$

Setzt man $n-1$ statt n , so findet man:

$$\begin{aligned} 72) \int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^n} &= \frac{1}{2(n-1)\beta^2} \cdot \frac{y}{(y^2 + \beta^2)^{n-1}} \\ &+ \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{\beta^2} \int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Es ist hiermit $\int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^n}$ auf $\int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^{n-1}}$ zurückgeführt. Es kann daher auch allgemein behauptet werden, dass das Integral von $\frac{A+Bx}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^n} \cdot dx$ hergestellt werden könne.

Fasst man die in I, II, III und IV untersuchten Fälle zusammen, so sieht man sich zu dem Schlusse geführt, dass eine jede rationale gebrochene Differentialformel integrabel ist.

86) Integration irrationaler algebraischer Differentialformeln. Wenn eine irrationale Differentialformel durch irgend eine Substitution rational gemacht werden kann, so ist die Integration derselben auf die in den früheren Paragraphen betrachteten Fälle zurückgeführt. Es ist daher bei irrationalen Differentialformeln vor Allem zu versuchen, dieselben durch eine passende Substitution rational zu machen. Gelingt dies nicht, so kann auch das Integral, einige specielle Fälle ausgenommen, in welchen dasselbe durch besondere Kunstgriffe erhalten wird, nicht vollständig sondern nur annähernd und oft nicht einmal in endlicher Form ausgedrückt werden.

Für einfachere irrationale Formeln ist die passende Substitution leicht zu finden, für zusammengesetztere hingegen meistens nur mit grossen Schwierigkeiten und in vielen Fällen gar nicht. Es können daher bei weitem nicht alle irrationale Differentialformeln integrirt werden, doch liegt die Ursache hiervon nicht in den ungenügenden Methoden der Integralrechnung, sondern in der Unvollständigkeit der Analysis. Jeder Fortschritt, den diese macht, wird von Einfluss auf jene sein.

Wenn die veränderliche Grösse nur an und für sich mit Wurzelexponenten in der Differentialformel auftritt, wie etwa in der Formel:

$$\frac{\sqrt{x} + a\sqrt[4]{x^5} + b\sqrt[3]{x^2}}{c + d\sqrt[3]{x} + f\sqrt[4]{x}} dx$$

so kann immer für x eine Function einer anderen Veränderlichen substituirt werden, durch welche die Irrationalität verschwindet. Man stellt zu diesem Zweck zunächst gleiche Wurzelexponenten her. Im vorliegenden Beispiel erhält man:

$$\frac{x^{\frac{6}{12}} + a x^{\frac{15}{12}} + b x^{\frac{8}{12}}}{c + d x^{\frac{4}{12}} + f x^{\frac{3}{12}}} \cdot dx.$$

Setzt man hierin $x = z^{12}$, also $dx = 12 z^{11} dz$, so erhält man:

$$\frac{z^6 + a z^{15} + b z^8}{c + d z^4 + f z^3} \cdot 12 z^{11} dz,$$

von welcher Differentialformel nach den früheren Regeln das Integral bestimmt werden kann.

87) Die Integration anderer irrationaler Differentialformeln wird am zweckmässigsten so dargelegt, dass von den einfacheren Formeln zu den zusammengesetzten fortgegangen wird. Auch hier ist für die einfachsten Formeln die Differentialrechnung der Ausgangspunkt.

Aus der Formel No. 30 folgt:

$$73) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc.} (\sin. = x) + C.$$

Aus der Formel No. 31 folgt:

$$74) \int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc.} (\cos. = x) + C.$$

Aus No. 34. und 35 folgt:

$$75) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{Arc.} (\sec. = x) + C.$$

$$76) \int -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{Arc.} (\cos. = \frac{1}{x}) + C.$$

Setzt man in No. 21. $\frac{n}{m} + 1$ statt n , und $a + bx$ statt x , daher auch $b dx$ statt dx , so erhält man:

$$d \cdot (a + bx)^{\frac{n}{m} + 1} = \left(\frac{n}{m} + 1 \right) (+bx)^{\frac{n}{m}} b dx.$$

Es ist daher:

$$77) \int (a + bx)^{\frac{n}{m}} dx = \frac{m}{(n+m)b} \cdot (a + bx)^{\frac{n}{m} + 1} + C.$$

Es ist auch ferner jede Differentialformel $f(x) \cdot (a + bx)^{\frac{n}{m}} dx$, wo $f(x)$ eine rationale algebraische Function von x bezeichnet, integrabel. Denn setzt man $a + bx = z^m$, also $x = \frac{z^m - a}{b}$ und $dx = \frac{mz^{m-1}}{b} dz$, so erhält man:

$$78) \int f(x) \cdot (a + bx)^{\frac{n}{m}} dx = \int f\left(\frac{z^m - a}{b}\right) \frac{m}{b} z^{n+m-1} dz$$

wodurch die irrationale Formel auf eine rationale zurückgebracht wird, deren Integral nach den früher entwickelten Regeln zu bestimmen ist.

88) Die zusammengesetztere Differentialformel

$\sqrt{a + x + cx^2} \cdot dx$,
und allgemeiner die Formel

$$F(x, \sqrt{a + bx + cx^2}) dx$$

kann stets durch eine Substitution rational gemacht werden. Zwei Fälle sind hier zu unterscheiden. Es ist $a + bx + cx^2$ entweder das Produkt zweier reellen, oder zweitens das Produkt zweier imaginärer Faktoren.

Im ersten Falle ist:

$$a + bx + cx^2 = (m + nx)(p + qx).$$

Setzt man:

$$\sqrt{(m + nx)(p + qx)} = (m + nx) z$$

und entwickelt man hieraus x , so findet man:

$$\alpha) x = \frac{mz^2 - p}{q - nz^2}.$$

Es ist daher:

$$\beta) dx = 2 \frac{mq - np}{(q - nz^2)^2} z dz,$$

und

$$\gamma) \sqrt{a + bx + cx^2} = \frac{mq - np}{q - nz^2} z.$$

Führt man diese Werthe in

$$F(x, \sqrt{a + bx + cx^2}) \cdot dx$$

ein, so erhält man :

$$79) F(x, \sqrt{a + bx + cx^2}) \cdot dx = F\left(\frac{mz^2 - p}{q - nz^2}, \frac{mq - np}{q - nz^2} z\right) \times \\ 2 \frac{mq - np}{(q - nz^2)^2} z \cdot dz,$$

wodurch die früher aufgestellte Behauptung für den ersten Fall erwiesen ist. Es lassen sich hiernach sogleich folgende Integrale herstellen.

Es soll das Integral von $\frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$ unter der Voraussetzung bestimmt werden, dass $a + bx + cx^2 = (m + nx)(p + qx)$ ist.

Man setze:

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = \sqrt{(m + nx)(p + qx)} = (m + nx)z,$$

daher $x = \frac{mz^2 - p}{q - nz^2}$ und $dx = 2 \frac{mq - np}{(q - nz^2)^2} z dz$. Es wird hierdurch

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{2 dz}{q - nz^2} = \frac{2 dz}{(\sqrt{q + z\sqrt{n}})(\sqrt{q - z\sqrt{n}})}.$$

Zerlegt man diesen Bruch in Partialbrüche, so findet man:

$$\frac{2 dz}{(\sqrt{q + z\sqrt{n}})(\sqrt{q - z\sqrt{n}})} = \frac{dz}{\sqrt{q}(\sqrt{q + z\sqrt{n}})} + \frac{dz}{\sqrt{q}(\sqrt{q - z\sqrt{n}})}.$$

Es ist daher:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \int \frac{2 dz}{q - nz^2} = \int \frac{dz}{\sqrt{q}(\sqrt{q + z\sqrt{n}})} + \int \frac{dz}{\sqrt{q}(\sqrt{q - z\sqrt{n}})} \\ = \frac{1}{\sqrt{nq}} \lg. (\sqrt{q + z\sqrt{n}}) - \frac{1}{\sqrt{nq}} \lg. (\sqrt{q - z\sqrt{n}}) + C \\ = \frac{1}{\sqrt{nq}} \lg. \frac{\sqrt{q + z\sqrt{n}}}{\sqrt{q - z\sqrt{n}}} + C.$$

Führt man den Werth von z , der aus der Gleichung

$$\sqrt{(m + nx)(p + qx)} = (m + nx)z$$

hervorgeht ein, so erhält man:

$$80) \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{nq}} \cdot \lg. \frac{\sqrt{q(m + nx)} + \sqrt{n(p + qx)}}{\sqrt{q(m + nx)} - \sqrt{n(p + qx)}} + C.$$

Für den Fall, dass n negativ ist, erhält man durch die gleiche Substitution

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{2 dz}{q + nz^2}.$$

Man erhält hieraus unter Berücksichtigung von No. 69.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = 2 \int \frac{dz}{q+nz^2} = \frac{2}{\sqrt{nq}} \cdot \text{Arc.} \left(\text{tg.} = z \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{q}} \right) + C.$$

Führt man den Werth von z wieder ein, so findet man:

$$81) \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{2}{\sqrt{nq}} \text{Arc.} \left(\text{tg.} = \frac{\sqrt{n(p+qx)}}{\sqrt{q(m-nx)}} \right) + C.$$

89) Wenn $a+bx+cx^2$ ein Produkt zweier imaginärer Faktoren ist, so kann die in vorhergehenden § benützte Substitution nicht in Anwendung kommen. Man setze dagegen:

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = z - x\sqrt{c}.$$

Man erhält hieraus:

$$\alpha) x = \frac{z^2 - a}{b + 2z\sqrt{c}}.$$

Es wird hierdurch $z - x\sqrt{c}$ oder

$$\beta) \sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{z^2\sqrt{c} + bz + a\sqrt{c}}{b + 2z\sqrt{c}}.$$

Ferner wird

$$\gamma) dx = 2 \frac{z^2\sqrt{c} + bz + a\sqrt{c}}{(b + 2z\sqrt{c})^2} dz.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (α) , (β) , (γ) geht die Formel $\int F(x, \sqrt{a+bx+cx^2}) dx$ in folgende über:

$$82) \int F\left(\frac{z^2+a}{b+2z\sqrt{c}}, \frac{z^2\sqrt{c}+bz+a\sqrt{c}}{b+2z\sqrt{c}}\right) \cdot \left(2 \frac{z^2\sqrt{c}+bz+a\sqrt{c}}{b+2z\sqrt{c}}\right) dz,$$

welche rational ist, deren Integral daher nach den früheren Regeln bestimmt werden kann.

Die eben benutzte Substitution kann auch dann angewendet werden, wenn $a+bx+cx^2$ das Produkt zweier reeller Faktoren ist. Nur ist hier der Fall ausgenommen, in welchem c negativ wird, indem hierdurch imaginäre Grössen in der Gleichung No. 82. auftreten würden.

Der specielle Fall $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ ist einer der einfachsten. Man erhält unter Berücksichtigung der Gleichungen (α) , (β) , (γ)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \int \frac{2dz}{b+2z\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \lg. (b+2z\sqrt{c}) + C.$$

Führt man für z den aus der Gleichung $\sqrt{a+bx+cx^2} = z - x\sqrt{c}$ hervorgehenden Werth ein, so erhält man:

$$83) \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \lg. (b+2xc+2\sqrt{c} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}) + C.$$

Die Formeln *No. 79* und *82* umfassen alle Differentialformeln, in welchen die Irrationalität durch $\sqrt{a+bx+cx^2}$ bewirkt ist. Die Formel *No. 82* genügt in den Fällen, in welchen c positiv ist, während *No. 79* in Anwendung kommt, wenn c negativ ist.

90) Dieselbe Substitution, durch welche $\sqrt{a+bx+cx^2} \cdot dx$ rational wird, bewirkt auch dass

$$(a+bx+cx^2)^{\frac{3}{2}} dx, (a+bx+cx^2)^{\frac{5}{2}} dx, \dots$$

rational werden. Es geht dies schon daraus hervor, dass man hat

$$(a+bx+cx^2)^{\frac{3}{2}} dx = (a+bx+cx^2) (a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$(a+bx+cx^2)^{\frac{5}{2}} dx = (a+bx+cx^2)^2 (a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

Die allgemeinere Formel $F(x, \sqrt{a+bx+cx^2}) \cdot dx$ wird nicht selten durch jene Substitution für x , durch welche sie eine rationale Form erhält, sehr zusammengesetzt, so dass die Integration weitläufig wird. Man hat um so mehr auf jede Abkürzung Rücksicht zu nehmen, und muss in gegebenen Fällen bald die bald jene Methode in Anwendung bringen, wie man eben gerade glaubt schneller zum Ziele gelangen zu können.

Da das Integral von $\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ in den vorhergehenden §§. hergestellt ist, so kann auch das Integral von $F(x, \sqrt{a+bx+cx^2}) \cdot dx$ dadurch bestimmt werden, dass es auf $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ zurückgeführt wird.

Es sei z. B. zu bestimmen $\int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$. Es ist:

$$d \cdot (x^m \sqrt{a+bx+cx^2}) = mx^{m-1} \sqrt{a+bx+cx^2} \cdot dx + x^m \cdot \frac{b+2cx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$$

$$= ma \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + \left(\frac{2m+1}{2} \right) b \frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

$$+ (m+1)c \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Hieraus folgt :

$$84) \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{x^m \sqrt{a+bx+cx^2}}{(m+1)c} - \frac{m}{m+1} \cdot \frac{a}{c} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} - \frac{2m+1}{2(m+1)} \cdot \frac{b}{c} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Für $m = 0$ erhält man:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{x \sqrt{a+bx+cx^2}}{c} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{c} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Für $m = 1$ erhält man:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{x^2 \sqrt{a+bx+cx^2}}{2c} - \frac{a}{2c} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} - \frac{3b}{4c} \int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Berücksichtigt man die vorhergehende Gleichung, so findet man:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{2cx^2 - 3bx}{4c^2} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2} + \frac{3b^2 - 4ac}{8c} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

u. s. w. Die hier befolgte Methode wird die der Recursion genannt. Sie ist, wenn es sich darum handelt Integraltafeln zu entwerfen, besonders wichtig, indem sie, wie das eben gegebene Beispiel zeigt, dazu dienen kann zusammengesetztere Integralfunctionen auf einfachere zurückzuführen.

91) Andere zusammengesetztere irrationale Formen können im Allgemeinen durch Substitution nicht rational gemacht werden. Es gibt nur einzelne Gruppen derselben, welche unter gewissen Bedingungen durch Substitution eine rationale Form erhalten. Eine dieser Gruppen ist repräsentirt durch die Formel

$$x^{m-1} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx.$$

Man setze $a+bx^n = z^q$. Es folgt hieraus:

$$x = \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Es ist daher:

$$dx = \frac{q}{nb} \cdot \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{1-n}{n}} z^{q-1} dz, \text{ und } x^{m+1} = \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m+1}{n}}.$$

Man erhält hiernach:

$$85) \quad x^{m-1} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx = \frac{q}{nb} \cdot \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m-n}{n}} z^{p+q-1} dz.$$

Es wird daher die vorgelegte Formel durch Substitution nur in den Fällen rational, in welchen $\frac{m-n}{n}$ eine ganze positive oder negative Zahl ist.

Setzt man $p+q$ statt p , so erhält man:

$$86) \quad x^{m-1} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1} dx = \frac{q}{nb} \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m-n}{n}} z^{p+2q-1} dz.$$

Setzt man $p \pm \alpha \cdot q$ statt p , so erhält man:

$$87) \quad x^{m-1} (a+bx^n)^{\frac{p}{q} \pm \beta} dx = \frac{q}{nb} \cdot \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m-n}{n}} z^{p+q(1 \pm \alpha)-1} dz.$$

Es gibt noch eine zweite Substitution, durch welche $x^{m-1} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx$ unter gewissen Bedingungen rational wird. Man setze:

$$a+bx^n = x^n z^q.$$

Es folgt hieraus:

$$x^n = \frac{a}{z^q - b}, \text{ und } x = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{(z^q - b)^{\frac{1}{n}}}.$$

Hierdurch wird:

$$(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}} z^p}{(z^q - b)^{\frac{p}{q}}}, \quad x^{m-1} = \frac{a^{\frac{m-1}{n}}}{(z^q - b)^{\frac{m-1}{n}}}$$

und $dx = - \frac{q a^{\frac{1}{n}} z^{q-1}}{n (z^q - b)^{\frac{1}{n}+1}} \cdot dz.$

Man erhält hiernach:

$$88) \quad x^{m-1} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx = - \frac{q a^{\frac{p}{q} + \frac{m}{n}} z^{p+q-1}}{n (z^q - b)^{\frac{p}{q} + \frac{m}{n} + 1}} \cdot dz.$$

Es wird daher die vorgelegte Formel auch in den Fällen rational, in welchen $\frac{p}{q} + \frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist.

Es soll z. B. das Integral von $x^3 \sqrt{1-x^2} dx$ bestimmt werden. Hier ist $m=4$, $n=2$, daher $\frac{m-n}{n} = \frac{2}{2} = 1$; es kommt

daher *No. 85* in Anwendung. Setzt man:

$$m = 4, n = 1, p = 1, q = 2, a = 1, b = -1$$

so findet man:

$$\int x^3 \sqrt{1-x^2} dx = \int (z^2 - 1) z^2 dz = \frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{3} + C.$$

Es ist aber $z = \sqrt{1-x^2}$, daher

$$89) \int x^3 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

In einem andern Falle sei zu bestimmen $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Hier ist $m = 3, n = 2$, daher $\frac{m-n}{n} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$. Es ist daher die Substitution die zu *No. 85* führte, nicht anwendbar. Da aber $p = -1, q = 2$ ist, so hat man $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$, es kann daher die Substitution, die zu *No. 88* führte, benutzt werden. Man setze in *No. 88*

$$m = 3, n = 2, p = -1, q = 2, a = 1, b = -1, 1-x^2 = x^2 z^2.$$

Man erhält:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \int \frac{dz}{(1+z^2)^2}.$$

Es ist aber nach *No. 72*, wenn man dort $y = z, \beta = 1$ und $x = 2$ setzt:

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{(1+z^2)^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1+z^2} \\ &= \frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2} \text{Arc. (tg. = } z) + C. \end{aligned}$$

Es ist daher:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \frac{z}{2(1+z^2)} - \frac{1}{2} \text{Arc. (tg. = } z) + C.$$

Da aber $z = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, so erhält man:

$$90) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \text{Arc. (tg. = } \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}) + C.$$

Es lässt sich eben dieses Integral auch ohne Substitution nach der Methode des theilweisen Integrirens unter Anwendung der Reductionsformel *No. 71* bestimmen. Setzt man nämlich in *No. 71* $u = x, z = -\sqrt{1-x^2}$, so erhält man:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} \cdot dx.$$

Es ist aber:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Hierdurch wird:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x \sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Hieraus folgt:

$$91) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \text{Arc.} (\sin. = x) + C.$$

Die Reductionsformel No. 71 kann auch dazu benutzt werden das Integrale $\int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$ auf das einfachere Integrale $\int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zurückzuführen. Setzt man zu diesem Zweck in No. 71 $u = x^m$, $z = -\sqrt{1-x^2}$, so erhält man:

$$\int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x \sqrt{1-x^2} + m \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Es ist aber:

$$\int x^{m-1} \sqrt{1-x^2} dx = \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Hierdurch wird

$$92) \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^m}{m+1} \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{m}{m+1} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx.$$

92) Wenn es gelingt nach der Methode des theilweisen Integrirens, oder durch Recursion, oder durch irgend eine Transformation eine gegebene irrationale Formel auf eine der bisher untersuchten Formeln zurückzuführen, so ist begreiflich die Integration ausführbar. Dies gelingt freilich nur in wenigen Fällen; man muss daher zugestehen, dass für die Mehrzahl der irrationalen Differentialformeln die Integrale nicht hergestellt werden können.

93) Integration der Differentialformeln, welche transcendente Functionen der Veränderlichen enthalten. Es sind hier drei Fälle zu unterscheiden. Es kann die mit dx verbundene Function 1tens Kreisfunctionen, 2tens Loga-

rithmen, und 3tens Exponentialgrößen enthalten. In allen Fällen werden die Integrale der einfachsten Formen aus der Differentialrechnung entnommen. Dort wurde gezeigt, dass

$$d \sin. nx = n \cos. nx \cdot dx,$$

$$d \cos. nx = - n \sin. nx \cdot dx,$$

$$d \operatorname{tg}. nx = \frac{n dx}{(\cos. nx)^2},$$

$$d \cot. nx = - \frac{n dx}{(\sin. nx)^2},$$

$$d \sec. nx = \frac{n \sin. nx}{(\cos. nx)^2} dx,$$

$$d \operatorname{cosec} nx = - \frac{n \cos. nx}{(\sin. nx)^2} dx.$$

Man erhält hiernach:

$$93) \int \cos. nx \, dx = \frac{\sin. nx}{n} + C,$$

$$94) \int \sin. nx \, dx = - \frac{\cos. nx}{n} + C,$$

$$95) \int \frac{dx}{(\cos. nx)^2} = \frac{\operatorname{tg}. nx}{n} + C,$$

$$96) \int \frac{dx}{(\sin. nx)^2} = - \frac{\cot. nx}{n} + C,$$

$$97) \int \frac{\sin. nx}{(\cos. nx)^2} dx = \frac{\sec. nx}{n},$$

$$98) \int \frac{\cos. nx}{(\sin. nx)^2} dx = - \frac{\operatorname{cosec} nx}{n}.$$

Es sind daher auch alle Differentialformeln, die auf die vorliegenden einfacheren zurückgebracht werden können, als integrabel zu betrachten.

Die Integrale einiger andern einfachen Formeln ergeben sich leicht durch Transformationen und Substitutionen. So ist:

$$\int \frac{dx}{\sin. x} = \int \frac{\sin. x \cdot dx}{\sin. x^2} = - \int \frac{d. (\cos. x)}{1 - \cos. x^2}.$$

Setzt man $\cos. x = z$, so erhält man:

$$\int \frac{d. (\cos. x)}{1 - \cos. x^2} = - \int \frac{dz}{1 - z^2} = - \frac{1}{2} \lg. \frac{1+z}{1-z} + C.$$

Es ist daher:

$$99) \int \frac{dx}{\sin. x} = -\frac{1}{2} \log. \frac{1 + \cos. x}{1 - \cos. x} + C. = \lg \frac{1}{\sin. x} + C$$

Ferner ist:

$$\int \frac{dx}{\cos. x} = \int \frac{\cos. x \cdot dx}{\cos. x^2} = \int \frac{d. (\sin. x)}{1 - \sin. x^2}.$$

Setzt man $\sin. x = z$, so erhält man:

$$\int \frac{d. (\sin. x)}{1 - \sin. x^2} = \int \frac{dz}{1 - z^2} = \frac{1}{2} \lg. \frac{1 + z}{1 - z} + C.$$

Es ist daher:

$$100) \int \frac{dx}{\cos. x} = \frac{1}{2} \lg. \frac{1 + \sin. x}{1 - \sin. x} + C.$$

Das Integral von $\frac{\cos. x}{\sin. x} dx$ ergibt sich wie folgt:

$$101) \int \frac{\cos. x}{\sin. x} \cdot dx = \int \frac{d. (\sin. x)}{\sin. x} = \lg. \sin. x + C.$$

Auf ähnliche Art findet man:

$$102) \int \frac{\sin. x \, dx}{\cos. x} = - \int \frac{d. (\cos. x)}{\cos. x} = - \lg. \cos. x + C.$$

Das Integral von $\frac{dx}{\sin. x \cdot \cos. x}$ kann auf verschiedenen Wegen bestimmt werden. Zunächst ist klar, dass

$$\int \frac{dx}{\sin. x \cdot \cos. x} = \int \frac{2 \, dx}{\sin. 2x}.$$

Setzt man in No. 99 $2x$ statt x , so findet man $\int \frac{2 \, dx}{\sin. 2x}$, oder:

$$103) \int \frac{dx}{\sin. x \cos. x} = -\frac{1}{2} \lg. \frac{1 + \cos. 2x}{1 - \cos. 2x} + C.$$

Da $\frac{1}{\sin. x \cdot \cos. x} = \frac{\cos. x}{\sin. x} + \frac{\sin. x}{\cos. x}$ ist, so hat man auch:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin. x \cdot \cos. x} &= \int \frac{\cos. x}{\sin. x} \cdot dx + \int \frac{\sin. x}{\cos. x} \cdot dx \\ &= \lg. \sin. x - \lg. \cos. x + C = \lg. \operatorname{tg}. x + C. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist nur eine andere Form als der in No. 103 gefundene, denn es ist $-\frac{1}{2} \lg. \frac{1 + \cos. 2x}{1 - \cos. 2x} = \lg. \operatorname{tg}. x$.

Endlich können auch die Integrale von $\sin. mx \cdot \cos. nx \cdot dx$, und von $\cos. mx \cdot \cos. nx \cdot dx$ nach einer passenden Transformation leicht bestimmt werden. Es ist:

$$\begin{aligned} \sin. mx \cdot \cos. nx &= \frac{1}{2} \sin. (m + n) x + \frac{1}{2} \sin. (m - n) x, \\ \cos. mx \cdot \cos. nx &= \frac{1}{2} \cos. (m + n) x + \frac{1}{2} \cos. (m - n) x. \end{aligned}$$

Man findet daher unter Berücksichtigung von *No. 93. 94.*

$$104) \int \sin. mx. \cos. nx. dx = \frac{1}{2} \int \sin. (m+n)x. dx + \frac{1}{2} \int \sin. (m-n)x. dx \\ = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos. (m+n)x}{m+n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos. (m-n)x}{m-n} + C,$$

und

$$105) \int \cos. mx. \cos. nx. dx = \frac{1}{2} \int \cos. (m+n)x. dx + \frac{1}{2} \int \cos. (m-n)x. dx \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin. (m+n)x}{m+n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin. (m-n)x}{m-n} + C.$$

94) Wenn Sinus oder Cosinus eines Winkels mit irgend einem Exponenten in der Differentialformel auftreten, wie dies in den Formeln $\sin x^n dx$, $\cos x^n dx$, $\sin x^m \cos x^n dx$, u. s. w. der Fall ist, so führt die Entwicklung von $\sin x^n$, $\cos x^n$ in Reihen, geordnet nach den Sinussen und Cosinussen vielfacher Bogen von x , zu Formen, die nach dem früheren § als integrabel zu betrachten sind. Es ist indess nicht nöthig zu diesen Reihenentwickelungen zurückzugehen, indem meist durch wiederholtes theilweises Integriren das Integral hergestellt werden kann. So erhält man nach *No. 71*, wenn man

$$u = \sin. x^{n-1} \text{ und } z = -\cos. x$$

setzt,

$$\int \sin x^n dx = -\sin x^{n-1} \cos. x + (n-1) \int \sin x^{n-2} \cos x^2 dx \\ = -\sin x^{n-1} \cos. x + (n-1) \int \sin x^{n-2} (1 - \sin. x^2) dx \\ = -\sin x^{n-1} \cos. x + (n-1) \int \sin x^{n-2} - (n-1) \int \sin x^n dx.$$

Hieraus folgt:

$$106) \int \sin x^n dx = -\frac{1}{n} \sin x^{n-1} \cos. x + \frac{n-1}{n} \int \sin x^{n-2} dx.$$

Es ist hierdurch $\int \sin x^n dx$ auf $\int \sin x^{n-2} dx$ zurückgebracht. Fährt man so fort, so wird man endlich, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist, auf die Integrale $\int dx$, $\int \sin. x dx$ kommen, welche bekannt sind.

Ist z. B. $n = 2$, so erhält man:

$$\int \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} \sin. x \cos. x + \frac{1}{2} x + C.$$

Ist $n = 3$, so erhält man:

$$\int \sin x^3 dx = -\frac{1}{3} \sin x^2 \cos. x - \frac{2}{3} \cos. x + C.$$

Für $n = 4$ erhält man:

$$\int \sin x^4 dx = -\frac{1}{4} \sin x^3 \cos. x + \frac{3}{4} \int \sin x^2 dx \\ = -\frac{1}{4} \sin x^3 \cos. x - \frac{3}{8} \sin. x \cos. x + \frac{3}{8} x + C$$

u. s. w.

Wenn n negativ ist, so erhält man aus *No. 106*

$$\int \sin x^{-n} dx = \frac{1}{n} \sin. x^{-(n+1)} \cos. x + \frac{n+1}{n} \int \sin x^{-(n+2)} dx.$$

Hieraus folgt:

$$107) \int \frac{dx}{\sin x^{n+2}} = - \frac{\cos. x}{(n+1) \sin x^{n+1}} + \frac{n}{n+1} \int \frac{dx}{\sin x^n}.$$

Für $n = 0, n = 1, n = 2, \dots$ erhält man nach der Reihe

$$\int \frac{dx}{\sin x^2} = - \frac{\cos. x}{\sin. x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x^3} = - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos. x}{\sin x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin. x},$$

$$\int \frac{dx}{\sin x^4} = - \frac{1}{3} \cdot \frac{\cos. x}{\sin x^3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\cos. x}{\sin. x} + C.$$

.....

Nur für den Fall $n = -1$ ist die Formel *No. 107* nicht anwendbar, doch ist für diesen Fall schon unter *No. 94* das Integral entwickelt.

Bei der Integration von $\cos x^n dx$ wird auf ähnliche Weise verfahren, wie bei Herstellung des Integrals von $\sin x^n dx$. Setzt man nämlich in *No. 71*

$$u = \cos. x^{n-1}, z = \sin. x,$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \int \cos x^n dx &= \cos x^{n-1} \sin. x + \int (n-1) \cos x^{n-2} \sin x^2 dx \\ &= \cos x^{n-1} \sin. x + (n-1) \int \cos x^{n-2} dx - (n-1) \int \cos x^n dx. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$108) \int \cos x^n dx = \frac{1}{n} \cos x^{n-1} \sin. x + \frac{n-1}{n} \int \cos x^{n-2} dx.$$

Ist n negativ, so hat man:

$$\int \cos x^{-n} dx = - \frac{1}{n} \cos x^{-(n+1)} \sin. x + \frac{n+1}{n} \int \cos x^{-(n+2)} dx.$$

Hieraus folgt:

$$109) \int \frac{dx}{\cos x^{n+2}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sin. x}{\cos x^{n+1}} + \frac{n}{n+1} \int \frac{dx}{\cos x^n}.$$

95) Bei der Integration der allgemeinen Formel $\sin x^m \cdot \cos x^n dx$ sind zwei Fälle zu unterscheiden. Ist erstens n eine gerade Zahl, daher $n = 2\alpha$, so hat man:

$$\sin. x^m \cdot \cos. x^n dx = \sin. x^m (1 - \sin. x^2)^\alpha dx.$$

Entwickelt man das Binomium und führt man die Multiplication mit $\sin x^m$ aus, so erhält man Glieder von der Form $\sin x^p dx$, die wie im vorhergehenden § gezeigt wurde, integrabel sind.

Ist zweitens n eine ungerade Zahl, so dass man hat $n = 2\alpha + 1$, so ist:

$$\sin x^n \cdot \cos x^m dx = \sin x^n (1 - \sin x^2)^\alpha \cdot \cos x dx.$$

Setzt man $\sin x = z$, daher $\cos x \cdot dx = dz$, so erhält man:

$$\sin x^n (1 - \sin x^2)^\alpha \cdot \cos x dx = z^n (1 - z^2)^\alpha \cdot dz;$$

diese Formel kann aber, da sie rational und algebraisch ist, nach den früheren Regeln integrirt werden.

Auch bei der Integration von $\frac{\cos x^n}{\sin x^m} dx$, sind dieselben Fälle zu unterscheiden. Ist erstens $n = 2\alpha$, so erhält man:

$$\int \frac{\cos x^n}{\sin x^m} dx = \int \frac{(1 - \sin x^2)^\alpha}{\sin x^m} dx.$$

Löst man das Binomium auf, so erhält man Ausdrücke von der Form $\sin x^\beta dx$ und $\frac{dx}{\sin x^\gamma}$, deren Integrale früher schon entwickelt wurden.

Ist zweitens $n = 2\alpha + 1$, so hat man:

$$\int \frac{\cos x^n}{\sin x^m} dx = \int \frac{(1 - \sin x^2)^\alpha \cdot d(\sin x)}{\sin x^m}.$$

Setzt man $\sin x = z$, so erhält man:

$$\int \frac{\cos x^n}{\sin x^m} dx = \int \frac{(1 - z^2)^\alpha}{z^m} \cdot dz.$$

Es ist hierdurch das Integral von $\frac{\cos x^n}{\sin x^m} dx$ auf die Integration einer rationalen algebraischen Formel zurückgebracht.

Soll endlich das Integral von $\frac{dx}{\sin x^m \cos x^n}$ bestimmt werden, so sind auch hier die früheren Fälle zu unterscheiden, und man überzeugt sich leicht, dass, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist, es nur darauf ankommt die Integrale von $\frac{dx}{\sin x^\beta}$, und $\frac{dz}{z^m (1 - z^2)^\alpha}$ zu bestimmen. Hierdurch ist aber das Integral von $\frac{dx}{\sin x^m \cdot \cos x^n}$ auf früher entwickelte Integrale zurückgeführt.

In allen zuletzt betrachteten Fällen kann auch das Integral nach der Methode des theilweisen Integrirens bestimmt werden. Es bieten sich hierbei sechs Reductionsformeln dar, die alle auf *No. 71* sich basiren lassen, und die zu bemerken von Nutzen ist.

Fürs erste setze man in *No. 71*

$$u = \cos x^{n-1}, \quad dz = \sin x^m d \cdot \sin x, \quad \text{daher } z = \frac{\sin x^{m+1}}{m+1}.$$

Man erhält:

$$110) \int \sin x^m \cdot \cos x^n dx = \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin x^{m+2} \cdot \cos x^{n-2} dx.$$

Setzt man hierin $m-2$ statt m , und $n+2$ statt n , so findet man

$$111) \int \sin x^m \cos x^n dx = -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin x^{m-2} \cdot \cos x^{n+2} dx.$$

Um andere Reductionsformeln zu erhalten, zerlege man zuvor $\sin x^m \cdot \cos x^n$ in Faktoren. Man erhält:

$$\sin x^m \cdot \cos x^n = \sin x^m \cos x^2 \cdot \cos x^{n-2} = \sin x^m \cos x^{n-2} - \sin x^{m+2} \cos x^{n-2}.$$

Ferner kann man setzen:

$$\sin x^m \cdot \cos x^n = \sin x^{m-2} \sin x^2 \cdot \cos x^n = \sin x^{m-2} \cos x^n - \sin x^{m-2} \cos x^{n+2}.$$

Es ist daher:

$$\int \sin x^m \cos x^n dx = \int \sin x^m \cos x^{n-2} dx - \int \sin x^{m+2} \cos x^{n-2} dx$$

und

$$\int \sin x^m \cos x^n dx = \int \sin x^{m-2} \cos x^n dx - \int \sin x^{m-2} \cos x^{n+2} dx.$$

Wendet man hier wiederholt die Formel *No. 71* an, so findet man nach einigen einfachen Reductionen folgende Gleichungen:

$$112) \int \sin x^m \cos x^n dx = -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin x^{m-2} \cos x^n dx.$$

$$113) \int \sin x^m \cos x^n dx = \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin x^m \cos x^{n-2} dx.$$

Setzt man in *No. 112* $m+2$ statt m , und in *No. 113* $n+2$ statt n , so findet man:

$$114) \int \sin x^m \cos x^n dx = \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin x^{m+2} \cos x^n dx.$$

$$115) \int \sin x^m \cos x^n dx = -\frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin x^m \cos x^{n+2} dx.$$

Da die Formeln *No. 110* bis *115* für positive und negative Werthe von m und n , und ebenso für ganze und gebrochene Zahlen, und endlich für m oder n Null gültig sind, so dienen dieselben zur Lösung aller in §. 94. und 95. vorgelegten Probleme.

96) Es sollen zum Schlusse noch die Integrale folgender Formeln bestimmt werden:

$$\frac{dx}{a + \sin. x}, \quad \frac{dx}{a + \cos. x}, \quad \frac{\sin. x \cdot dx}{a + \sin. x}, \quad \frac{\cos. x \cdot dx}{a + \cos. x}.$$

Setzt man $\sin. x = z$, so erhält man $\cos. x \cdot dx = dz$, und

hieraus $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$. Es ist daher:

$$\int \frac{dx}{a + \sin. x} = \int \frac{dz}{(a+z) \sqrt{1-z^2}}.$$

Diese Formel wird nach §. 88 rational, wenn man setzt:

$$a) \quad z = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}.$$

Man erhält hierdurch:

$$116) \int \frac{dz}{(a+z) \sqrt{1-z^2}} = \frac{2}{a+1} \int \frac{dy}{y^2 + \frac{a-1}{a+1}}.$$

Ist a positiv und > 1 , so lässt sich die Integration nach der Formel *No. 69* ausführen. Man erhält hiernach:

$$\frac{2}{a+1} \int \frac{dy}{y^2 + \frac{a-1}{a+1}} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \text{Arc.} \left(\text{tg.} = y \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \right) + C.$$

Führt man den Werth von y , wie er aus (α) folgt, ein, und setzt man für z wieder $\sin. x$, so findet man:

$$117) \int \frac{dx}{a + \sin. x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \text{Arc.} \left(\text{tg.} = \sqrt{\frac{(1 + \sin. x)(a + 1)}{(1 - \sin. x)(a - 1)}} \right) + C.$$

Wenn a positiv und < 1 ist, so wird der oben gefundene Ausdruck imaginär, indem $\frac{a-1}{a+1}$ negativ wird. Doch sieht man sogleich, dass in diesem Falle die Formel No. 116 durch Logarithmen integrirt werden kann, indem der Nenner $y^2 + \frac{a-1}{a+1}$ die Form $y^2 - b$ erhält, und daher in die Faktoren $y + \sqrt{b}$, $y - \sqrt{b}$ zerlegt werden kann, die weiter zu Partialbrüchen mit entsprechenden Nennern führen. Man erhält unter dieser Voraussetzung

$$\frac{2}{a+1} \int \frac{dy}{y^2 + \frac{a-1}{a+1}} = \frac{2}{a+1} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{-\frac{a-1}{a+1}}} \lg. \frac{y - \sqrt{-\frac{a-1}{a+1}}}{y + \sqrt{-\frac{a-1}{a+1}}} + C.$$

Es ist aber nach (α) $y = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$, und $z = \sin. x$, man hat daher:

$$118) \int \frac{dx}{a + \sin. x} = \frac{1}{\sqrt{-(a^2 - 1)}} \cdot \lg. \frac{\sqrt{\left(\frac{1 + \sin. x}{1 - \sin. x}\right)} - \sqrt{-\frac{a-1}{a+1}}}{\sqrt{\left(\frac{1 + \sin. x}{1 - \sin. x}\right)} + \sqrt{-\frac{a-1}{a+1}}} + C.$$

Das Integral von $\frac{dx}{a + \cos. x}$ ergiebt sich aus No. 117 und 118, wenn man $90^\circ - x$ statt x , und daher $-dx$ statt dx setzt.

Da $\frac{\sin. x \, dx}{a + \sin. x} = dx - \frac{a \, dx}{a + \sin. x}$,

so ist

$$119) \int \frac{\sin. x \, dx}{a + \sin. x} = x - a \int \frac{dx}{a + \sin. x}.$$

Ebenso findet man

$$120) \int \frac{\cos. x \, dx}{a + \cos. x} = x - a \int \frac{dx}{a + \cos. x}.$$

97) Bei der Integration der Differentialformeln, welche Kreisbogen enthalten, geht man wieder von den einfachsten Fällen aus.

Gesetzt es sei das Integral von $\text{Arc.}(\sin. = x) dx$ zu bestimmen.

Man setze $\text{Arc.}(\sin. = x) = y$, daher $x = \sin. y$, und $dx = \cos. y \cdot dy$. Man erhält hierdurch:

$$\int \text{Arc.}(\sin. = x) dx = \int y \cdot \cos. y dy.$$

Es ist aber nach *No. 71*:

$$\int y \cos. y dy = y \sin. y - \int \sin. y dy = y \sin. y + \cos. y + C.$$

Setzt man für y wieder $\text{Arc.}(\sin. = x)$ daher x für $\sin. y$, und $\sqrt{1-x^2}$ für $\cos. y$, so findet man:

$$121) \int \text{Arc.}(\sin. = x) dx = x \text{Arc.}(\sin. = x) + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Soll von der allgemeineren Formel $x^n \text{Arc.}(\sin. = x) dx$ das Integral bestimmt werden, so kann die eben benutzte Substitution wieder angewendet werden. Man erhält hierdurch:

$$\int x^n \text{Arc.}(\sin. = x) dx = \int \sin y^n \cdot y \cdot \cos. y dy.$$

Es ist aber nach *No. 71*:

$$122) \int \sin y^n \cdot \cos. y dy \cdot y = \frac{\sin y^{n+1}}{n+1} y - \frac{1}{n+1} \int \sin y^{n+1} dy.$$

Es ist hierdurch das Integral von $x^n \text{Arc.}(\sin. = x) dx$ auf eine schon aus *No. 106* bekannte Integration zurückgeführt.

Euler hat dieses Integral auf einem andern Wege hergestellt. Man erhält nämlich durch theilweises Integriren unmittelbar:

$$123) \int x^n \text{Arc.}(\sin. = x) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{Arc.}(\sin. = x) - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Es lässt sich aber das Integral von $\frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$ nach §. 91 immer bestimmen.

Wenn $\int f(x) dx = F(x)$ eine algebraische Function von x ist, so kann das Integral von $f(x) \cdot \text{Arc.}(\sin. = x) dx$ immer auf das Integral einer algebraischen Differentialformel zurückgebracht werden. Es ist nämlich:

$$124) \int f(x) \text{Arc.}(\sin. = x) dx = F(x) \text{Arc.}(\sin. = x) - \int \frac{F(x) \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Auf ähnliche Weise können die Integrale von

$$\text{Arc.}(\cos. = x) dx, f(x) \text{Arc.}(\cos. = x) dx, \text{Arc.}(\text{tg.} = x) dx, \dots$$

hergestellt werden.

98) Die Integration der Differentialformeln, welche Exponential-Größen enthalten, geschieht einige einfache Fälle ausgenommen, unter Anwendung der nun schon öfter benutzten Reductionsformel *No. 71*. Sie führt indess begreiflich nur dann zu einem günstigen Resultate, wenn durch die Reduction ein einfacheres Integral als das Vorgelegte erhalten wird, wodurch man zuletzt nach wiederholter Anwendung der Reductionsformel zu einem bekannten Integral gelangt. Wenn dies nicht der Fall ist, so kann das Integral, wenn man von den Formeln absieht, die durch besondere Kunstgriffe integrirt werden können, nur durch Näherung bestimmt werden.

Die einfachste Formel, die hier in Betrachtung kömmt, ist $a^x dx$. Das Integral derselben wird unmittelbar aus der Differentialrechnung entnommen. Man hat nämlich nach *No. 22*:

$$d \cdot a^x = a^x \log. \text{nat. } a \cdot dx.$$

Es ist daher:

$$125) \int a^x dx = \frac{a^x}{\log. \text{nat. } a} + C.$$

Da $\log. \text{nat. } e = 1$, so ist:

$$126) \int e^x dx = e^x + C.$$

Zur Integration der allgemeineren Formel $a^x f(x) dx$ können zwei Reductionsgleichungen aufgestellt werden. Man hat nach *No. 71* erstens

$$127) \int a^x f(x) dx = \frac{a^x}{\log. \text{nat. } a} \cdot f(x) - \frac{1}{\log. \text{nat. } a} \int a^x \frac{dfx}{dx} \cdot dx,$$

es ist aber auch, wenn man $\int f(x) dx$ gleich $F(x)$ findet, ebenfalls nach *No. 71*:

$$128) \int a^x f(x) dx = a^x \cdot F(x) - \log. \text{nat. } a \int a^x F(x) dx.$$

Je nachdem $a^x \frac{dfx}{dx} dx$ oder $a^x F(x) dx$ einfacher ist als $a^x f(x) dx$, wird man die eine oder andere dieser Formeln in Anwendung bringen. Wäre z. B. $f(x) = x^n$, so hat man nach der ersten der Reductionsformeln

$$\int a^x \cdot x^n \cdot dx = \frac{a^x}{\log. \text{nat. } a} \cdot x^n - \frac{n}{\log. \text{nat. } a} \int a^x x^{n-1} dx.$$

Hier ist $a^x x^{n-1} dx$ einfacher als $a^x x^n dx$, und man kommt unter wiederholter Anwendung derselben Formel endlich auf $\int a^x dx$, welches Integral nach *No. 125* bekannt ist.

In einem andern Falle sei $f(x) = \frac{1}{x^n}$. Es ist:

$$\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}.$$

Man hat daher nach *No. 128*:

$$\int \frac{a^x}{x^n} dx = -\frac{a^x}{\log. \text{nat. } a} \cdot \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\log. \text{nat. } a}{n-1} \int \frac{a^x}{x^{n-1}} dx.$$

Unter wiederholter Anwendung derselben Reduktionsformel kommt man daher endlich auf das Integral von $\frac{a^x dx}{x}$, welches durch keine der beiden Reduktionsformeln auf eine einfachere Form zurückgebracht, und überhaupt nicht in begrenzter Form dargestellt werden kann. Es ist daher das Integral $\int \frac{a^x dx}{x}$ als eine besondere Art transcendenter Grössen zu betrachten, für welches nur eine annähernde aber keine vollständige Bestimmung möglich ist.

Setzt man $a^x = z$, daher $a^x \lg. \text{nat. } a \cdot dx = dz$, und $x \lg. \text{nat. } a = \lg. \text{nat. } z$, so erhält man:

$$\int \frac{a^x dx}{x} = \int \frac{dz}{\lg. \text{nat. } z}.$$

Es gehört daher $\int \frac{dz}{\lg. \text{nat. } z}$ zu derselben Art transcendenter Grössen wie $\int \frac{a^x dx}{x}$. Man nennt $\int \frac{dz}{\lg. \text{nat. } z}$ den Integral-Logarithmus von z , und bezeichnet ihn durch $\text{li. } z$. Hiernach ist:

$$\int \frac{a^x dx}{x} = \text{li. } a^x.$$

Da nach *No. 8*:

$$a^x = 1 + (\lg. \text{nat. } a) \frac{x}{1} + (\lg. \text{nat. } a)^2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots,$$

so ist:

$$129) \int \frac{a^x dx}{x} = \lg. x + (\lg. \text{nat. } a) x + (\lg. \text{nat. } a)^2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + C.$$

Setzt man hierin $a^x = z$, so findet man $\int \frac{dz}{\lg. \text{nat. } z}$ oder:

$$130) \operatorname{li}. z = \lg. \lg. \operatorname{nat}. z + \log. \operatorname{nat}. z + \frac{(\lg. \operatorname{nat}. z)^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2} + \dots + C.$$

99) Bei der Integration der Differentialformeln, welche Logarithmen enthalten, wird auf ähnliche Weise, wie im vorhergehenden § verfahren. Auch hier kommt es wesentlich darauf an durch eine Reduction das zusammengesetztere Integral auf ein einfacheres zurückzuführen, und auch hier leistet die Reducionsformel No. 71 die wesentlichsten Vortheile.

So hat man, um mit den einfachsten Fällen zu beginnen, durch theilweises Integriren

$$131) \int \lg. x \cdot dx = x \lg. x - x + C,$$

und allgemeiner

$$\int \lg. x \cdot x^n dx = \lg. x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} \frac{dx}{x},$$

folglich

$$132) \int \lg. x \cdot x^n dx = \lg. x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

Wendet man die Reducionsformel No. 71 sogleich auf den viel allgemeineren Fall $f(x) \cdot \lg. (x) dx$ an, so hat man, unter der Voraussetzung dass $\int f(x) dx = F(x)$ ist,

$$133) \int f(x) \lg. (x) dx = \lg. (x) \cdot F(x) - \int \frac{F(x) \cdot dx}{x}.$$

Es kann daher das Integral $\int f(x) \lg. (x) dx$ in allen Fällen bestimmt werden, in welchen $\int f(x) dx = F(x)$ eine algebraische Function von x ist.

Wenn eine zusammengesetztere Formel nicht auf einen der schon erörterten Fälle durch Reduction sich zurückführen lässt, und wenn dies auch durch keine Substitution geschehen kann, so kann überhaupt das vollständige Integral derselben nicht bestimmt werden. Man muss sich in solchen Fällen mit einer näherungsweisen Bestimmung begnügen, die indess erst weiter unten näher erörtert werden soll.

100) Reihe von J. Bernoulli. Die in den vorhergehenden §§ benützte Methode der Reduction führt unter wiederholter Anwendung zu der von J. Bernoulli aufgestellten Integrationsreihe. Es ist nämlich nach No. 71:

$$\begin{aligned}
 \int f(x) dx &= f(x) \cdot x - \int \frac{df(x)}{dx} \cdot x \cdot dx, \\
 \int \frac{df(x)}{dx} \cdot x dx &= \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot dx, \\
 \int \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{2} dx &= \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} - \int \frac{d^3f(x)}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} \cdot dx, \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man:

$$134) \int f(x) dx = f(x) \cdot x - \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots$$

Die Brauchbarkeit dieser Reihe hängt wesentlich von der Convergenz derselben ab, indem sie zu einer näherungsweise Bestimmung des Integrals nur unter Voraussetzung ihrer Convergenz dienlich ist.

101) Die verschiedenen Methoden der Integration. Die verschiedenen Methoden, welche bei den bisherigen Integrationen in Anwendung kamen, sind der Zahl nach nur wenige. Im Grunde kam alles darauf an, eine zusammengesetztere Integralfunktion auf eine oder auf einige schon bekannte Integralfunktionen zurückzuführen. Die bekannten Integrale sind aber keine andern, als jene, welche unmittelbar aus der Differentialrechnung durch Umkehrung erhalten werden. So sind die Integrale

$$\int x^m dx, \int \frac{dx}{x}, \int \frac{dx}{a \pm x}, \int \frac{dx}{1+x^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \int \cos. x dx, \int \sin. x dx, \int a^x dx, \dots$$

bekannt, sie werden aus den einfachsten Formeln der Differentialrechnung erhalten.

Die Methoden der Integralrechnung sind also im wesentlichen Reductionsmethoden. Man kann deren drei unterscheiden, die in den früheren Untersuchungen in Anwendung kamen, die aber nun in grösserer Allgemeinheit erörtert werden sollen.

102) Die erste Methode ist die des Zerlegens. Sie kam vorzugsweise bei der Integration rationaler gebrochener Differentialformeln in Anwendung. Das Wesen derselben besteht darin, dass in der Formel $f(x) dx$ der Faktor $f(x)$ in Theile zerlegt wird, die mit den in §. 101 erwähnten einfachen Formen übereinstimmen. Es ist begreiflich da, wo dies gelingt, die Integra-

tion einer zusammengesetzteren Formel auf schon entwickelte Integrale zurückgebracht.

Die Ausdehnung, in welcher diese Methode zur Anwendung kommt, ist von der Ausbildung der Analysis abhängig. So wurde früher gezeigt, dass jeder Bruch dessen Nenner das Produkt mehrerer Faktoren ist, in Partialbrüche mit einfachen Nennern zerlegt werden könne. Wäre es nun möglich die einfachen reellen und doppelten imaginären Faktoren, als dessen Produkt der Ausdruck $x^{n+1} + Ax^n + Bx^{n-1} + \dots$ betrachtet werden darf, allgemein darzustellen, so könnte auch das Integral jeder rationalen gebrochenen Differentialformel hergestellt werden. Die Zerlegung in Faktoren kömmt aber auf die Bestimmung der Wurzeln der Gleichung $x^{n+1} + Ax^n + Bx^{n-1} + \dots = 0$ zurück, welche Bestimmung bekanntlich für numerische Gleichungen eines jeden Grades gelingt, für algebraische Gleichungen hingegen allgemein noch nicht gelungen ist.

Man kann gleichwohl behaupten, dass nach der Methode des Zerlegens alle Differentialformeln integrirt werden können, nur erhält man in vielen Fällen unendliche Reihen, die zur Bestimmung des Werthes eines Integrales nur unter der Voraussetzung der Convergenz anwendbar sind. Jedenfalls ist aber hiermit zugleich eine neue Methode zur Entwicklung der Functionen in Reihen gegeben. Denn gesetzt es sei

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

auf irgend einem Wege gefunden. Ferner werde $f(x)$ in einer Reihe geordnet nach den Potenzen von x entwickelt, so dass man hat

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$$

Es folgt hieraus

$$F(x) + C = A_0 x + A_1 \frac{x^2}{2} + A_2 \frac{x^3}{3} + \dots$$

So hat man z. B. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc.}(\sin. = x) + C$. Da für $x = 0$

auch $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ wird, indem der Bogen mit dem Sinus zugleich verschwindet, so ist $C = 0$; und man hat

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc.} (\sin. = x).$$

Es ist aber nach dem binomischen Lehrsatz:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot x^6 + \dots,$$

folglich:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

Hiernach ist:

$$\text{Arc.} (\sin. = x) = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

Für $x = \frac{1}{2}$ ist $\text{Arc.} (\sin. = x)$ gleich $\frac{\pi}{6}$, wo π den halben Kreisumfang bezeichnet. Man hat hiernach:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} + \dots;$$

addirt man die ersten zehn Glieder dieser Reihe, so erhält man:

$$\frac{\pi}{6} = 0,52359877,$$

$$\text{daher: } \pi = 3,14158262,$$

wo erst die 8te Decimale nicht genau ist.

Zu einem zweiten Beispiel diene das Integral $\int \frac{dx}{1+x^2}$. Bekanntlich ist

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc.} (\text{tang.} = x) + C.$$

Da aber für $x = 0$ auch der Bogen verschwindet, so hat man $0 = 0 + C$, daher:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc.} (\text{tang.} = x).$$

Ferner ist:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots,$$

folglich:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Es ist daher:

$$\text{Arc.} (\text{tang.} = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

103) Die zweite Methode ist die der Substitution. Sie kam besonders in Anwendung bei der Integration irrationaler Differentialformeln, und gab das Mittel ab, irrationale Formen auf rationale zurückzubringen. Allgemein kann sie in folgender Weise dargestellt werden.

Es sei $f(x) dx$ die zu integrierende Differentialformel. Man setze $x = \varphi(y)$, daher $dx = \frac{d\varphi(y)}{dy} \cdot dy$. Es ist daher:

$$135) \int f(x) dx = \int f[\varphi(y)] \frac{d\varphi(y)}{dy} \cdot dy.$$

In der Anwendung kömmt es darauf an, ob die zweite dieser Eormeln einfacher ist als die erste, wobei aber die einfachere Formel immer jene ist, welche auf schon bekannte Integrale zurückweist.

Die Substitution kann auch benutzt werden, um aus bekannten Integralen andere abzuleiten. Denn ist $\int f(x) dx$ bekannt, so ist auch

$$\int f[\varphi(y)] \frac{d\varphi(y)}{dy} dy$$

bekannt, man hat nur in dem Endresultat $\varphi(y)$ statt x zu setzen. Man sagt dann, man habe durch Ableitung das Integral bestimmt, und nennt wohl auch das ganze Verfahren die Ableitungsmethode.

Es ist dies nicht die einzige Methode, nach welcher aus bekannten Integralen andere sich ableiten lassen. Es können, gestützt auf einige einfache Lehrsätze der Differentialrechnung, noch zwei andere Wege angegeben werden, die, jedoch nur in beschränkteren Fällen, von schon entwickelten Integralen zu neuen Integralen führen.

Gesetzt nämlich es sei

$$\int f(x, a) dx = F(x, a)$$

gefunden, wo a eine von x unabhängige Grösse ist. Betrachtet man a als eine veränderliche Grösse, und nimmt man die Differenz in Bezug auf a , so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f(x, a) dx}{\Delta a} &= \frac{f(x, a+h) dx - f(x, a) dx}{h} = \int \frac{f(x, a+h) - f(x, a)}{h} \cdot dx \\ &= \int \frac{\Delta f(x, a)}{\Delta a} \cdot dx = \frac{\Delta F(x, a)}{\Delta a}.\end{aligned}$$

Geht man zu dem speciellen Fall über, in welchem $h = 0$ wird, so hat man:

$$136) \frac{d f(x, a) dx}{da} = \int \frac{d f(x, a)}{da} \cdot dx = \frac{d F(x, a)}{da}.$$

Es ist daher unter den angegebenen Bedingungen gleichgültig, ob man zuerst in Hinsicht x integrirt und dann in Hinsicht a differentirt, oder ob man zuerst in Hinsicht a differentirt und dann in Hinsicht x integrirt.

So ist z. B. nach *No. 95*:

$$\int \frac{dx}{(\cos. nx)^2} = \frac{\text{tg. } nx}{n}.$$

Differentirt man in Hinsicht n , so erhält man:

$$\int 2x \cdot \frac{\sin. nx}{(\cos. nx)^3} \cdot dx = \frac{x}{n(\cos. nx)^2} - \frac{\text{tg. } nx}{n^2} + C.$$

Man erkennt, wie man aus dieser Formel, wenn man von Neuem in Hinsicht n differentiren würde, ein anderes Integrale ableiten könnte u. s. w.

Es schliesst sich hieran noch eine andere Ableitungsmethode an. Es ist nach *No. 46*, wenn x und a von einander unabhängige Grössen sind, und beide als veränderlich betrachtet werden,

$$\frac{d^2 f(x, a)}{dx da} \cdot dx da = \frac{d^2 f(x, a)}{da dx} \cdot da \cdot dx.$$

So wie es hiernach gleichgültig ist, ob man zuerst in Hinsicht x und dann in Hinsicht a , oder zuerst in Hinsicht a und dann in Hinsicht x differentirt, so ist es auch umgekehrt gleichgültig, ob man zuerst in Hinsicht x und dann in Hinsicht a , oder zuerst in Hinsicht a und dann in Hinsicht x integrirt.

Da der Quotient $\frac{d^2 f(x, a)}{dx da}$ gleich irgend einer Function von x und a ist, so sei $\frac{d^2 f(x, a)}{dx da} = F(x, a)$. Man kann hiernach das oben ausgesprochene Resultat in Zeichen auf folgende Weise festhalten:

$$137) \int \left(\int F(x, a) dx \right) da = \int \left(\int F(x, a) da \right) dx.$$

Um zu zeigen wie nach dieser Formel aus schon entwickelten Integralen andere sich ableiten lassen, mag folgendes Beispiel dienen.

Es ist:

$$\int \frac{a dx}{1+a^2x^2} = \text{Arc. (tg. = ax)},$$

und

$$\int \frac{a da}{1+a^2x^2} = \frac{1}{2x^2} \lg. (1+a^2x^2).$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} \int \left(\int \frac{a dx}{1+a^2x^2} \right) da &= \int \text{Arc. (tg. = ax)} da \\ &= a \cdot \text{Arc. (tg. = ax)} - \frac{1}{2x} \lg. (1+a^2x^2), \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad \int \left(\int \frac{a da}{1+a^2x^2} \right) dx = \int \frac{\lg. (1+a^2x^2)}{2x^2} dx.$$

Man erhält daher unter Berücksichtigung der Gleichung No. 137:

$$\int \frac{\lg. (1+a^2x^2)}{2x^2} dx = a \text{Arc. (tg. = ax)} - \frac{1}{2x} \lg. (1+a^2x^2) + C.$$

Es lässt sich diese Methode der Ableitung unter Berücksichtigung der Gleichung No. 47, und der in §. 20 erhaltenen Resultate noch viel weiter ausdehnen. Doch genügt es dies hier anzudeuten, denn zur Integration wirklich vorgelegter Differentialformeln sind alle Ableitungsmethoden an sich kaum brauchbar, sie dienen nur dazu aus entwickelten Integralen andere abzuleiten, wobei man nicht anders als auf dem Wege des Errathens oder des Versuchs zur Integration einer bestimmten Differentialformel gelangt.

104) Die dritte Methode ist die der Reduction. Sie gründet sich auf die allgemeine Formel

$$\int u dz = uz - \int z du,$$

wo u und z Functionen derselben Variabeln sind. Ihre Anwendung beschränkt sich auf jene Fälle, in welchen entweder $\int z du$ einfacher als die vorgelegte Integralfunction $\int u dz$ ist, oder in welchen eine wiederholte Reduction von $\int z du$ endlich wieder zu dem Integral $\int u dz$ zurückführt. Hierdurch würde man nämlich erhalten:

$$fz du = F(u, z) + A f u dz.$$

Führt man diesen Werth in der Reductionsformel ein, so hat man:

$$f u dz = uz - F(u, z) - A f u dz,$$

folglich:

$$\int u dz = \frac{uz - F(u, z)}{1 + A}.$$

105) Näherungsweise Bestimmung der Integrale.
Die Anwendung der in den letzten §§. dargelegten Methoden zur Bestimmung der Integrale der verschiedenen Differentialformeln zeigte, dass bei weitem nicht von allen Differentialformeln des ersten Grades und einer Veränderlichen die Integrale bestimmt werden können. Um so wichtiger ist es Wege aufzusuchen, auf welchen wenigstens eine näherungsweise Bestimmung der Integrale möglich wird.

Einer dieser Wege ist schon in §. 102 angegeben. Er besteht in der Entwicklung der Integrale durch unendliche Reihen. Es kömmt, wenn hierdurch eine näherungsweise Bestimmung der Integrale beabsichtigt wird, wesentlich auf die Kennzeichen der Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen an, denn nur von convergenten Reihen kann näherungsweise die Summe angegeben werden. Es sind daher auch nur diese zur näherungsweisen Bestimmung der Integrale anwendbar.

Eine unendliche Reihe ist convergent, wenn die Summe ihrer späteren oder spätesten Glieder verschwindend klein ist, und daher auf die Summe der ganzen Reihe nur einen verschwindend kleinen Einfluss äussert. Es giebt dann die Summe der frühern Glieder annähernd die Summe der ganzen Reihe. Es reicht desshalb zur Convergenz einer Reihe noch nicht hin, dass die späteren Glieder immer kleiner und zuletzt verschwindend klein werden, denn es kann ganz wohl der Fall sein, dass die Summe unendlich vieler verschwindend kleiner Grössen einer endlichen ja sogar einer unendlich gross werdenden Grösse gleich wird. Aber soviel ist gewiss, dass eine unendliche Reihe, deren spätere Glieder stets wachsen, jedenfalls divergent und gar nicht sumirbar ist.

Es kann daher die Entwicklung der Kennzeichen der Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen nur jene Reihen betreffen, deren spätere Glieder stets abnehmen. Zwei Fälle sind hierbei zu unterscheiden, es besitzen die Glieder der Reihen abwechselnde Zeichen oder sie haben alle gleiche Zeichen.

Ist das erste der Fall, so ist die Reihe immer convergent. Denn gesetzt es sei

$$u_0 - u_1 + u_2 \dots + u_n - u_{n+1} + \dots$$

eine unendliche Reihe, in welcher jedes folgende Glied kleiner als das Vorhergehende ist. Ferner sei S_n die Summe der Glieder von u_n an gerechnet, oder es sei

$$S_n = u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - \dots$$

Es folgt hieraus:

$$S_n - u_n = - (u_{n+1} - u_{n+2}) - (u_{n+3} - u_{n+4}) - \dots,$$

und

$$S_n - (u_n - u_{n+1}) = (u_{n+2} - u_{n+3}) + (u_{n+4} - u_{n+5}) + \dots$$

Da aber nach der Voraussetzung sowohl $u_{n+1} - u_{n+2}$, $u_{n+3} - u_{n+4}$, ... wie $u_{n+2} - u_{n+3}$, $u_{n+4} - u_{n+5}$, ... positive Grössen sind, so muss sein

$$S_n < u_n$$

und

$$S_n > u_n - u_{n+1},$$

womit die Grenzen des Werthes von S_n angegeben sind. Da aber u_n für einen sehr grossen Werth von n sehr klein und endlich verschwindend klein wird, so wird in dem gleichen Falle auch S_n verschwindend klein, d. h. die Summe der spätesten Glieder ist verschwindend klein, die Reihe ist daher convergent.

Ganz in gleicher Weise lässt sich darthun, dass auch jene unendlichen Reihen convergent sind, in welchen immer eine gleiche Anzahl positiver und negativer Glieder abwechselnd auf einander folgen, und in welchen zugleich jedes folgende Glied kleiner als das vorhergehende ist.

Es ist zweitens der Fall zu untersuchen, in welchem alle Glieder gleiche Zeichen besitzen. Es seien

$$\alpha) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots$$

$$\beta) \quad a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

zwei solche Reihen. Zugleich sei bekannt, dass die zweite dieser Reihen convergent ist, dass also von irgend einem Glied an gerechnet, etwa von dem Gliede a_n an, die Summe aller späteren Glieder verschwindend klein wird.

Wenn nun für alle Werthe von n bis ∞

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} > \frac{a_n}{a_{n+1}},$$

so ist bestimmt auch die Reihe (α) convergent. Denn die Quotienten $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ drücken aus wie vielmal kleiner ein späteres Glied als das unmittelbar vorhergehende ist. Wenn daher $\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{a_n}{a_{n+1}}$, so nehmen die Glieder der Reihe (α) rascher ab als die der Reihe (β) . Nun ist aber die Reihe (β) convergent, d. h. die Summe ihrer spätesten Glieder ist verschwindend klein, es wird daher um so mehr die Summe der spätesten Glieder der noch rascher abnehmenden Reihe (α) verschwindend klein sein. Woraus die Convergenz derselben hervorgeht.

Es ist hiermit zugleich ein Kennzeichen gegeben, nach welchem, wenn nur die Convergenz einer Reihe mit gleichen Zeichen erwiesen ist, die vieler anderer Reihen ermittelt werden kann. Es kömmt daher darauf an, sich von der Convergenz einer bestimmten Reihe auf irgend einem Wege zu überzeugen, damit eben diese Reihe zur Vergleichung mit andern Reihen benutzt werden könne.

Man kann hiezu die geometrische Reihe:

$$a + a \cdot \alpha + a \alpha^2 + \dots + a \alpha^n + a \cdot \alpha^{n+1} + \dots$$

anwenden. Die Summe der n ersten Glieder derselben ist:

$$S = \frac{a(\alpha^n - 1)}{\alpha - 1}.$$

Ist $\alpha < 1$, so wird für $n = \infty$

$$S = \frac{a}{1 - \alpha},$$

daher gleich einer endlichen Grösse. Es ist daher in diesem Falle die unendliche Reihe summirbar, folglich auch convergent.

Ist $\alpha > 1$, so wird für $n = \infty$ auch S gleich ∞ , die Reihe ist daher in diesem Falle divergent.

Ist endlich $\alpha = 1$, so geht S für $n = \infty$ in die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ über. Bestimmt man den Werth derselben nach §. 45, so findet man, dass auch in diesem Falle S unendlich gross wird.

Die geometrische Reihe ist daher nur in dem Falle convergent, in welchem $\alpha < 1$ oder in welchem $\frac{1}{\alpha} > 1$ ist. Da $\frac{1}{\alpha}$ der Quotient zweier auf einander folgender Glieder der geometrischen Reihe ist, oder da man hat

$$\frac{a \alpha^n}{a \alpha^{n+1}} = \frac{1}{\alpha},$$

so kann man die Bedingung der Convergenz einer geometrischen Reihe auch so ausdrücken:

$$\frac{a \alpha^n}{a \alpha^{n+1}} > 1.$$

Man kann hiernach folgende Behauptung aufstellen: eine unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots,$$

in welcher der Quotient $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ zweier aufeinander folgender Glieder sich um so mehr einer Grenze G nähert, je grösser n wird, ist convergent wenn $G > 1$, und divergent wenn $G < 1$.

Denn vergleicht man die eben vorgelegte Reihe mit der geometrischen Reihe:

$$a + a\alpha + a\alpha^2 + \dots + a\alpha^n + a\alpha^{n+1} + \dots,$$

welche als convergent vorausgesetzt wird, so ist die Bedingung der Convergenz der vorgelegten Reihe ausgedrückt durch

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{a \alpha^n}{a \alpha^{n+1}}.$$

Nun ist aber nach der Voraussetzung $\frac{a \alpha^n}{a \alpha^{n+1}} > 1$, um so mehr muss also auch $\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1$ sein, wenn die vorgelegte Reihe convergiren soll.

Nähert sich der Quotient $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ beim unendlichen Zunehmen von n einem Werthe der kleiner als eins ist, so wird, da $\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{a \alpha^n}{a \alpha^{n+1}}$ sein soll, auch $\frac{a \alpha^n}{a \alpha^{n+1}} < 1$ sein müssen. In diesem

Falle divergirt aber die geometrische Reihe, folglich ebenso die vorgelegte unendliche Reihe.

Es gibt einen Fall, in welchem das eben entwickelte Kennzeichen der Convergenz nicht genügt. Dieser tritt ein, wenn der Quotient $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ beim unendlichen Wachsen von n einer Grenze sich nähert, die nur um ein unendlich Kleines von der Einheit verschieden ist. So hat man z. B. in der Reihe:

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{(n+1)^m} + \cdots$$

für den Quotienten $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ den Werth

$$\frac{(n+1)^m}{n^m} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m.$$

Wird n unendlich, so wird $\frac{1}{n}$ verschwindend klein, und man hat

$$\lim \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1.$$

Um solche Reihen auf ihre Convergenz zu prüfen, leitet man zunächst aus denselben andere Reihen ab, die so beschaffen sind, dass mit ihrer Convergenz zugleich die Convergenz der gegebenen Reihe erwiesen ist.

Es sei:

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + v_{n+1} + \cdots$$

eine solche abgeleitete Reihe. Wenn nun hier $\lim \frac{v_n}{v_{n+1}} > 1$, so ist die Reihe convergent. Es wird daher ebenso die ursprünglich vorgelegte Reihe, in welcher $\lim \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$ war, convergent

sein. Ist $\lim \frac{v_n}{v_{n+1}} = 1$, so genügt die abgeleitete Reihe nicht um die Convergenz oder Divergenz zu erkennen, es muss daher eine andere Ableitung versucht werden.

Um die Methode der Ableitung näher nachzuweisen, sei

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots$$

eine Reihe, in welcher $\lim \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$ ist.

Da die späteren Glieder kleiner als die vorhergehenden sind, so hat man:

$$2u_2 > u_2 + u_3,$$

$$4u_4 > u_4 + u_5 + u_6 + u_7,$$

$$8u_8 > u_8 + u_9 + \dots + u_{15},$$

.....

Construirt man hiernach folgende Reihe:

$$u_1 + 2u_2 + 2^2u_2^2 + 2^3u_2^3 + \dots + 2^{n-1}u_2^{n-1} + 2^nu_2^n + \dots,$$

so kann man behaupten, dass wenn dieselbe summirbar oder convergent ist, dass ein Gleiches auch bei der ursprünglichen Reihe der Fall sein wird. Die zweite Reihe convergirt aber, wenn der Quotient

$$\frac{2^{n-1}u_2^{n-1}}{2^nu_2^n}$$

für eine unendliche Zunahme von n einem Grenzwert sich nähert, der grösser als die Einheit ist.

Es sei z. B. die Reihe:

$$1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \dots + \frac{1}{n^a} + \frac{1}{(n+1)^a} + \dots$$

auf Convergenz oder Divergenz zu prüfen. Hier nähert sich der Quotient $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ mit der unendlichen Zunahme von n der Einheit.

Leitet man nun wie oben eine neue Reihe aus der gegebenen ab, so erhält man:

$$1 + \frac{1}{2^{a-1}} + \frac{1}{2^{2(a-1)}} + \dots + \frac{1}{2^{(n-1)(a-1)}} + \frac{1}{2^{n(a-1)}} + \dots$$

Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder bleibt hier selbst bei einer unendlichen Zunahme von n 2^{a-1} .

Die Reihe ist daher für jene Werthe von a convergent, für welche $2^{a-1} > 1$ wird. Dies ist aber nur der Fall, wenn $a > 1$ ist. Wenn $a = 1$ wird, so ist die Reihe divergent, es ist daher die harmonische Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots$$

divergent.

Die mitgetheilten Sätze über Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen rühren der Hauptsache nach von Cauchy her, und wurden von ihm mitgetheilt im Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique 1^{re} partie Chap. VI.

In den Commentat. soc. reg. scient. Gottingensis recentior. vol. VII. ist in einer Abhandlung von Ganss derselbe Gegenstand, aus einem sehr allgemeinen Gesichtspunkt aufgefasst, entwickelt. Die Resultate besitzen eine entsprechende Allgemeinheit, und sind für die Anwendungen, um die es sich hier handelt, von besonderer Wichtigkeit.

Die Glieder einer unendlichen Reihe:

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1} \dots$$

seien so beschaffen, dass man hat

$$u_n = \frac{A_0 n^m + A_1 n^{m-1} + \dots + A_m}{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p},$$

und

$$u_{n+1} = \frac{A_0 (n+1)^m + A_1 (n+1)^{m-1} + \dots + A_m}{a_0 (n+1)^p + a_1 (n+1)^{p-1} + \dots + a_p},$$

wo $A_0, A_1, \dots, a_0, a_1, \dots$ von n unabhängige Grössen sind.

Es ist hiernach:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{A_0 n^m + A_1 n^{m-1} + \dots + A_m}{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p} \cdot \frac{a_0 (n+1)^p + a_1 (n+1)^{p-1} + \dots + a_p}{A_0 (n+1)^m + A_1 (n+1)^{m-1} + \dots + A_m}.$$

Entwickelt man die Binomien, multiplicirt man hierauf die beiden Brüche mit einander, und dividirt man endlich Zähler und Nenner durch $A_0 a_0$, so erhält man für den Quotienten $\frac{u_n}{u_{n+1}}$

einen Bruch von der Form

$$\frac{n^q + B_1 n^{q-1} + \dots + B_q}{n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q},$$

wo $m + p = q$ gesetzt ist, und wo $B_1, B_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ von n unabhängige Grössen sind.

Wenn $B_1 - b_1$ für ein unendlich gross werdendes n positiv ist, so ist der Zähler grösser als der Nenner, daher $u_n > u_{n+1}$. Die Reihe ist daher eine fallende. Wird dagegen unter gleicher Voraussetzung $B_1 - b_1$ negativ, so ist $u_n < u_{n+1}$. Die Reihe ist daher eine steigende. Sollte $B_1 - b_1$ Null werden, so entscheidet der Werth von $B_2 - b_2$, u. s. w.

Hiermit sind nur Kennzeichen des Fallens und Steigens einer unendlichen Reihe gegeben. Da aber aus dem steten Abnehmen der Glieder einer Reihe noch nicht folgt, dass die

spätesten Glieder unendlich klein werden, und da ebenso aus einem steten Zunehmen der spätesten Glieder noch nicht auf ein Unendlichgrosswerden derselben geschlossen werden kann, indem in beiden Fällen die spätesten Glieder nach einer bestimmten Grenze convergiren könnten, so ist eine besondere Untersuchung zur näheren Erläuterung dieses Punktes geboten.

Es sei erstens $B_1 - b_1$ eine positive Grösse.

Bildet man eine neue Reihe, deren allgemeine Glieder

$$U_n = n u_n^r, U_{n+1} = (n+1) u_{n+1}^r, \dots$$

sind, so hat man für den Quotienten zweier aufeinander folgender Glieder:

$$\begin{aligned} \frac{U_n}{U_{n+1}} &= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{u_n^r}{u_{n+1}^r} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(n^q + B_1 n^{q-1} + B_2 n^{q-2} + \dots + B_q)^r}{(n^q + b_1 n^{q-1} + b_2 n^{q-2} + \dots + b_q)^r} \\ &= \frac{n^{qr+1} + r B_1 n^{qr} + \dots}{n^{qr+1} + (r b_1 + 1) n^{qr} + \dots} \end{aligned}$$

Die Reihe $U_n, U_{n+1}, \dots$ ist daher eine fallende, wenn $r(B_1 - b_1) - 1$ positiv wird. Nach der Voraussetzung ist $B_1 - b_1$ positiv, es kann daher r immer so gewählt werden, dass $r(B_1 - b_1) - 1$ positiv und daher die Reihe $U_n, U_{n+1}, \dots$ eine fallende wird.

Da U_n auch bei einer unendlichen Zunahme von n stets abnimmt, und da zugleich $U_n = n u_n^r$ ist, so muss nothwendig, wenn n unendlich gross wird, u_n^r folglich auch u_n verschwindend klein werden.

Die Reihe $u_0, u_1, u_2 \dots u_n, u_{n+1}, \dots$ ist daher, wenn $B_1 - b_1$ positiv ausfällt, nicht allein eine fallende, es werden überdiess ihre spätesten Glieder verschwindend klein.

Es sei zweitens $B_1 - b_1$ negativ.

Bildet man eine Reihe, deren Glieder

$$U_n = \frac{u_n^r}{n}, U_{n+1} = \frac{u_{n+1}^r}{n+1}, \dots$$

sind, so hat man:

$$\frac{U_n}{U_{n+1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{u_n^r}{u_{n+1}^r} = \frac{n^{qr+1} + (r B_1 + 1) n^{qr} + \dots}{n^{qr+1} + r b_1 n^{qr} + \dots}$$

Die Reihe $U_n, U_{n+1}, \dots$ ist daher eine steigende, wenn $r(B_1 - b_1) + 1$ negativ wird. Nach der Voraussetzung ist $B_1 - b_1$ negativ, es kann daher r immer so gewählt werden, dass $r(B_1 - b_1) + 1$

negativ ausfällt. Da in diesem Falle U_n , auch wenn n unendlich wächst, stets grösser wird, und da zugleich die Gleichung $U_n = \frac{u_n^r}{n}$ bestehen soll, so muss nothwendig, wenn n unendlich gross wird, auch u_n^r , folglich auch u_n , unendlich gross werden.

Die spätesten Glieder einer unendlichen Reihe werden daher unendlich gross, wenn $B_1 - b_1$, negativ ist.

Es sei endlich $B_1 - b_1 = 0$.

Hier entscheidet der Werth von $B_2 - b_2$ über das Steigen oder Fallen der Reihe. Gesetzt es sei die Reihe eine steigende, es sei also $B_2 - b_2$ negativ.

Bildet man eine neue Reihe, deren allgemeines Glied

$$U_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^r u_n$$

ist, so erhält man für den Quotienten zweier aufeinander folgender Glieder:

$$\begin{aligned} \frac{U_n}{U_{n+1}} &= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^r \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}} \\ &= \frac{n^{2r+q} + B_1 n^{2r+q-1} + B_2 n^{2r+q-2} + \dots}{n^{2r+q} + b_1 n^{2r+q-1} + (b_2-r) n^{2r+q-2} + \dots} \end{aligned}$$

Die Reihe $U_n, U_{n+1}, \dots$ ist daher eine fallende, wenn $B_2 - b_2 + r$ positiv wird. Wählt man r so, dass diese Bedingung erfüllt wird, so nehmen die Glieder der Reihe $U_n, U_{n+1}, \dots$ stets ab, wenn n unendlich wächst. Nun folgt aber aus der Gleichung

$$U_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^r u_n,$$

dass $U_n > u_n$ ist. Wenn daher auch U_n bei einer unendlichen Zunahme von n stets kleiner wird, so muss es doch immer noch grösser als u_n bleiben. Es ist aber nach der Voraussetzung die Reihe $u_0, u_1, u_2, \dots u_n, u_{n+1}, \dots$ eine steigende, es ist daher U_n , wenn n unendlich zunimmt, an eine bestimmte Grenze gebunden. Ebenso bleibt u_n bei einer unendlichen Zunahme von n stets kleiner als U_n , und kann daher eine bestimmte Grenze nicht überschreiten.

In einem zweiten Falle sei $B_2 - b_2$ positiv, während $B_1 - b_1 = 0$ ist. Hiernach ist die Reihe $u_0, u_1, u_2, \dots u_n, u_{n+1}, \dots$ eine fallende.

Bildet man eine neue Reihe so, dass das allgemeine Glied derselben

$$U_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^r u_n$$

ist, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{U_n}{U_{n+1}} &= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^r \frac{u_n}{u_{n+1}} \\ &= \frac{n^{2r+q} + B_1 n^{2r+q-1} + (B_2-r) n^{2r+q-2} + \dots}{n^{2r+q} + b_1 n^{2r+q-1} + b_2 n^{2r+q-2} + \dots} \end{aligned}$$

Wählt man r so, dass $B_2 - b_2 - r$ negativ wird, was immer geschehen kann, so ist die Reihe $U_n, U_{n+1}, \dots$ eine steigende. Zugleich folgt aus der Gleichung $U_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^r u_n$, dass $U_n < u_n$ ist. Wenn daher auch U_n bei steter Zunahme von n immer grösser wird, so muss es doch immer noch kleiner als u_n bleiben. Ebenso ist u_n an eine bestimmte Grenze gebunden, denn wenn auch u_n stets kleiner wird, während n ins Unendliche zunimmt, so bleibt doch $u_n > U_n$.

Im Ganzen geht aus dem bisherigen hervor, dass eine unendliche Reihe nur in dem Falle convergent sein kann, in welchem $B_1 - b_1$ positiv ist, denn in jedem anderen Falle werden die spätesten Glieder entweder unendlich gross, oder sie convergiren nach einer bestimmten Grenze; die Summe der spätesten Glieder kann daher nicht verschwindend klein werden, wie dies zur Convergenz einer Reihe erforderlich ist.

Wenn $B_1 - b_1$ positiv ausfällt, so ist hiermit nur die Möglichkeit der Convergenz einer Reihe gegeben, denn es lässt sich hiernach nur behaupten, dass die spätesten Glieder verschwindend klein werden. Ob eine unendliche Reihe unter der Voraussetzung, dass $B_1 - b_1$ positiv ist, convergent sei oder nicht, bedarf daher noch einer besonderen Untersuchung. Es lassen sich hierbei drei Fälle unterscheiden, entweder ist $B_1 - b_1 < 1$, oder es ist $B_1 - b_1 = 1$, oder endlich es ist $B_1 - b_1 > 1$.

Es sei erstens $B_1 - b_1 < 1$.

Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^q + B_1 n^{q-1} + \dots + B_q}{n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q}.$$

Es ist daher:

$$\frac{n \cdot u_n}{(n+1)u_{n+1}} = \frac{n^{q+1} + B_1 n^q + \dots}{n^{q+1} + (b_1 + 1)n^q + \dots}.$$

Da nach der Voraussetzung $B_1 - b_1 < 1$, so ist $B_1 - b_1 - 1$ jedenfalls negativ, es ist daher der Nenner grösser als der Zähler oder es ist:

$$(n+1)u_{n+1} > n u_n,$$

folglich:

$$u_{n+1} > \frac{1}{n+1} \cdot n u_n.$$

Ebenso ist:

$$(n+2)u_{n+2} > (n+1)u_{n+1},$$

folglich um so mehr

$$(n+2)u_{n+2} > n u_n,$$

daher:

$$u_{n+2} > \frac{1}{n+2} n u_n.$$

Man findet auf gleiche Weise:

$$u_{n+3} > \frac{1}{n+3} \cdot n u_n,$$

$$u_{n+4} > \frac{1}{n+4} \cdot n u_n,$$

.....

Es ist daher:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots > n u_n \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots \right).$$

Da die harmonische Reihe $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots$, wie früher gezeigt wurde, divergirt, so ist um so mehr $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$ divergent.

Der Fall $B_1 - b_1 < 1$ ist daher ein Zeichen der Divergenz.

Der Fall $B_1 - b_1 = 1$ lässt sich auf eine ähnliche Weise näher analysiren. Multiplicirt man nämlich den Zähler des Bruches

$\frac{u_n}{u_{n+1}}$ mit $n - \alpha$ und den Nenner mit $n - \alpha + 1$, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{(n-\alpha)u_n}{(n-\alpha+1)u_{n+1}} &= \frac{(n-\alpha)(n^q + B_1 n^{q-1} + \dots + B_q)}{(n-\alpha+1)(n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q)} \\ &= \frac{n^{q+1} + (B_1 - \alpha)n^q + (B_2 - \alpha B_1)n^{q-1} + \dots}{n^{q+1} + (b_1 - \alpha + 1)n^q + (b_2 - \alpha b_1 + b_1)n^{q-1} + \dots}. \end{aligned}$$

Da nach der Voraussetzung $B_1 - b_1 = 1$ ist, so wird $B_1 - \alpha - (b_1 - \alpha + 1) = 0$. Es entscheidet daher der Unterschied $B_2 - \alpha B_1 - (b_2 - \alpha b_1 + b_1)$. Hierin kann aber α immer so gewählt werden, dass dieser Unterschied negativ wird, in diesem Falle ist aber:

$$(n - \alpha + 1) u_{n+1} > (n - \alpha) u_n,$$

folglich:

$$u_{n+1} > \frac{1}{n - \alpha + 1} \cdot (n - \alpha) u_n.$$

Ebenso ist:

$$u_{n+2} > \frac{1}{n - \alpha + 2} \cdot (n - \alpha + 1) u_{n+1},$$

folglich um so mehr:

$$u_{n+2} > \frac{1}{n - \alpha + 2} \cdot (n - \alpha) u_n.$$

Auf gleiche Weise findet man:

$$u_{n+3} > \frac{1}{n - \alpha + 3} \cdot (n - \alpha) u_n,$$

$$u_{n+4} > \frac{1}{n - \alpha + 4} \cdot (n - \alpha) u_n,$$

.....

Es folgt hieraus:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots > (n - \alpha) u_n \left(\frac{1}{n - \alpha + 1} + \frac{1}{n - \alpha + 2} + \frac{1}{n - \alpha + 3} + \dots \right).$$

Da nun die in Klammern stehende Reihe divergirt, so divergirt auch die Reihe $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$.

Der Fall $B_1 - b_1$ ist daher ebenfalls ein Zeichen der Divergenz.

Es ist endlich der dritte Fall $B_1 - b_1 > 1$ zu untersuchen.

Multiplicirt man den Zähler des Bruches $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ mit $n - \alpha - 1$, und den Nenner mit n , so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{(n - \alpha - 1) u_n}{n \cdot u_{n+1}} &= \frac{(n - \alpha - 1) (n^q + B_1 n^{q-1} + \dots + B_q)}{n (n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q)} \\ &= \frac{n^{q+1} + (B_1 - \alpha - 1) n^q + \dots}{n^{q+1} + b_1 n^q + \dots} \end{aligned}$$

Es kommt hier auf den Unterschied $(B_1 - \alpha - 1) - b_1$ an. Nach der Voraussetzung ist $B_1 - b_1 > 1$, es ist daher $B_1 - b_1 - 1$ eine

positive Grösse, wählt man nun α so, dass $\alpha < B_1 - b_1 - 1$ wird, so ist $B_1 - \alpha - 1 - b_1$ positiv, es ist daher:

$$n u_{n+1} < (n - \alpha - 1) u_n,$$

folglich auch:

$$u_{n+1} < \frac{n - \alpha - 1}{n} u_n.$$

Ebenso ist:

$$u_{n+2} < \frac{n - \alpha}{n + 1} u_{n+1},$$

daher auch:

$$u_{n+2} < \frac{(n - \alpha - 1)(n - \alpha)}{n(n + 1)} u_n.$$

Auf ähnliche Weise findet man:

$$u_{n+3} < \frac{(n - \alpha - 1)(n - \alpha)(n - \alpha + 1)}{n(n + 1)(n + 2)} u_n,$$

$$u_{n+4} < \frac{(n - \alpha - 1)(n - \alpha)(n - \alpha + 1)(n - \alpha + 2)}{n(n + 1)(n + 2)(n + 3)} u_n,$$

.....

Hieraus folgt:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots < u_n \left(\frac{n - \alpha - 1}{n} + \frac{(n - \alpha - 1)(n - \alpha)}{n(n + 1)} + \frac{(n - \alpha - 1)(n - \alpha)(n - \alpha + 1)}{n(n + 1)(n + 2)} + \dots \right)$$

Die Summe der in Klammern stehenden Reihe lässt sich bestimmen, denn es ist:

$$\begin{aligned} \frac{n - \alpha - 1}{n} &= \frac{n - \alpha - 1}{\alpha} - \frac{(n - \alpha - 1)(n - \alpha)}{\alpha \cdot n}, \\ \frac{(n - \alpha - 1)(n - \alpha)}{n(n + 1)} &= \frac{(n - \alpha - 1)(n - \alpha)}{\alpha n} - \frac{(n - \alpha - 1)(n - \alpha)(n - \alpha + 1)}{\alpha n(n + 1)}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{(n - \alpha - 1)(n - \alpha) \dots (n - \alpha + p - 1)}{n(n + 1) \dots (n + p)} \\ &= \frac{(n - \alpha - 1)(n - \alpha) \dots (n - \alpha + p - 1)}{\alpha n(n + 1) \dots (n + p - 1)} - \frac{(n - \alpha - 1)(n - \alpha) \dots (n - \alpha + p)}{\alpha n(n + 1) \dots (n + p)}. \end{aligned}$$

Durch Summation dieser Gleichungen erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{n - \alpha - 1}{n} + \frac{(n - \alpha - 1)(n - \alpha)}{n(n + 1)} + \dots + \frac{(n - \alpha - 1)(n - \alpha) \dots (n - \alpha + p - 1)}{n(n + 1) \dots (n + p)} \\ = \frac{n - \alpha + 1}{\alpha} - \frac{(n - \alpha - 1)(n - \alpha) \dots (n - \alpha + p)}{\alpha \cdot n(n + 1) \dots (n + p)}. \end{aligned}$$

Es kommt daher nur noch darauf an den Werth des Bruches

$$\frac{(n - \alpha - 1)(n - \alpha) \dots (n - \alpha + p)}{\alpha n(n + 1) \dots (n + p)}$$

für den Fall, dass p unendlich wächst, zu bestimmen. Wird dieser Bruch hierbei verschwindend klein, so wird die Summe der in Klammern stehenden Reihe gleich $\frac{n-\alpha-1}{\alpha}$, daher gleich einer endlichen Grösse, die Reihe ist daher summierbar also auch convergent. Hiermit wäre daher zugleich die Convergenz der Reihe $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$ bewiesen.

Der Bruch:

$$\frac{(n-\alpha-1)(n-\alpha)\dots(n-\alpha+p)}{\alpha n(n+1)\dots(n+p)}$$

wird nun wirklich verschwindend klein, wenn p unendlich gross wird. Denn bezeichnet man denselben durch v_p , und setzt man $p+1, p+2, \dots$ für p , so dass man die unendliche Reihe:

$$v_p, v_{p+1}, v_{p+2}, \dots$$

erhält, so hat man:

$$\frac{v_p}{v_{p+1}} = \frac{p+n+1}{p+n+1-\alpha}.$$

Der Unterschied $(n+1-\alpha) - (n+1)$ ist, auch wenn p unendlich wächst, gleich α , also positiv. Die spätesten Glieder der Reihe $v_p, v_{p+1}, v_{p+2}, \dots$ werden daher verschwindend klein.

Der Schluss der ganzen Untersuchung lässt sich daher in folgender Weise zusammenfassen: eine unendliche Reihe ist convergent, wenn $B_1 - b_1$ positiv und zugleich grösser als die Einheit ist, in allen anderen Fällen ist sie divergent.

Die Anwendung der vorgetragenen Lehrsätze zur näherungsweisen Bestimmung der Integrale ist an sich einleuchtend und bedarf keiner Erläuterung an einzelnen Beispielen. Sie wird hier noch besonders aus dem Grunde übergangen, weil später die Entwicklung bestimmter Integrale auf denselben Gegenstand zurückführt, wo aber zugleich die Erörterung specieller Fälle von besonderer Wichtigkeit wird.

Wenn die unendliche Reihe, zu welcher die Entwicklung einer Integralfunction führt, divergirt, so kann ihre Summe, daher auch das Integral auf diesem Wege gar nicht bestimmt werden. Es gibt aber eine Methode, die auch in diesen Fällen

und überhaupt für alle Differentialformeln des ersten Grades und einer Variablen eine näherungsweise Bestimmung der Integrale ausführbar macht. Es wird dieselbe im nächsten Abschnitt bei der Entwicklung bestimmter Integrale, einem der wichtigsten Gegenstände analytischer Untersuchungen, mitgetheilt werden.

Zweiter Abschnitt.

B e s t i m m t e I n t e g r a l e.

106) Es wurde schon in der Einleitung zur Integralrechnung in §. 78 angegeben, in welchem Falle ein Integral ein bestimmtes genannt wird. Die Entwicklung solcher Integrale ist, sei es dass man auf die Anwendung derselben in Geometrie und Mechanik sieht, oder sei es, dass man die analytische Bedeutung derselben im Auge hat, von grösster Wichtigkeit. — Wenn das unbestimmte Integral einer Differentialformel gefunden ist, so hat es keine Schwierigkeit den Werth des Integrals innerhalb bestimmter Grenzen abzuleiten, es sind dabei nur einige wenige sogleich näher zu bezeichnende Punkte zu beachten. Wenn das unbestimmte Integral nicht gefunden ist, oder nach den früheren Regeln sich gar nicht herstellen lässt, dann werden nicht selten alle Kunstgriffe der Analysis erfordert, selbst wenn nur eine näherungsweise Bestimmung des bestimmten Integrals erzielt werden soll.

107) Ein jedes bestimmte Integral kann als die Summe unendlich vieler verschwindend kleiner Grössen betrachtet werden. Der Beweis dieses für die Herstellung und Anwendung bestimmter Integrale so wichtigen Satzes lässt sich unmittelbar aus den Principien der Differentialrechnung entnehmen.

Leitet man aus $f(x)$ eine Reihe von Functionen in der Weise her, dass man für x successiv

$$x+h_0, x+h_0+h_1, \dots, x+h_0+h_1+\dots+h_n$$

setzt, so erhält man:

$$f(x), f(x+h_0), f(x+h_0+h_1), \dots, f(x+h_0+h_1+\dots+h_n).$$

Die Differenz je zweier aufeinander folgender Glieder führt zu einer neuen Reihe von folgenden Gliedern:

$$\Delta f(x), \Delta f(x+h_0), \Delta f(x+h_0+h_1), \dots, \Delta f(x+h_0+h_1+\dots+h_n).$$

Hier ist:

$$\Delta f(x) = f(x+h_0) - f(x),$$

$$\Delta f(x+h_0) = f(x+h_0+h_1) - f(x+h_0),$$

$$\Delta f(x+h_0+h_1) = f(x+h_0+h_1+h_2) - f(x+h_0+h_1),$$

...

$$\Delta f(x+h_0+h_1+\dots+h_{n-1})$$

$$= f(x+h_0+h_1+\dots+h_n) - f(x+h_0+h_1+\dots+h_{n-1}).$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man:

$$\begin{aligned} & f(x+h_0+h_1+\dots+h_n) - f(x) \\ &= \Delta f(x) + \Delta f(x+h_0) + \Delta f(x+h_0+h_1) + \dots + \Delta f(x+h_0+h_1+\dots+h_{n-1}). \end{aligned}$$

Da aber

$$\Delta f(x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x, \quad \Delta f(x+h_0) = \frac{\Delta f(x+h_0)}{\Delta(x+h_0)} \cdot \Delta(x+h_0),$$

u. s. w., und da ferner

$$\Delta x = (x+h_0) - x = h_0, \quad \Delta(x+h_0) = (x+h_0+h_1) - (x+h_0) = h_1,$$

u. s. w. ist, so hat man auch

$$\begin{aligned} & f(x+h_0+h_1+\dots+h_n) - f(x) \\ &= \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} h_0 + \frac{\Delta f(x+h_0)}{\Delta(x+h_0)} h_1 + \frac{\Delta f(x+h_0+h_1)}{\Delta(x+h_0+h_1)} h_2 + \dots \\ &+ \frac{\Delta f(x+h_0+h_1+\dots+h_{n-1})}{\Delta(x+h_0+h_1+\dots+h_{n-1})} h_n \end{aligned}$$

In dem speciellen Falle, in welchem die Zunahmen von x , von $x+h_0$, von $x+h_0+h_1$, u. s. w. verschwindend klein werden, geht $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ in $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{\Delta f(x+h_0)}{\Delta(x+h_0)}$ in $\frac{df(x+h_0)}{d(x+h_0)}$, u. s. w. über.

Der Differentialquotient $\frac{df(x)}{dx}$ ist im Allgemeinen eine Function

von x , so dass man hat $\frac{df(x)}{dx} = \varphi(x)$. Ebenso ist $\frac{df(x+h_0)}{d(x+h_0)}$

$= \varphi(x+h_0)$, u. s. w. Wenn daher $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n$, unendlich viele verschwindend klein werdende Grössen sind, so hat man:

$$\begin{aligned} & f(x+h_0+h_1+\dots+h_n) - f(x) \\ &= \varphi(x)h_0 + \varphi(x+h_0)h_1 + \varphi(x+h_0+h_1)h_2 + \dots + \varphi(x+h_0+h_1+\dots+h_{n-1})h_n. \end{aligned}$$

Setzt man $x=a$, und $a+h_0+h_1+\dots+h_n=b$, so erhält man:

$$138) \quad f(b) - f(a) \\ = \varphi(a)h_0 + \varphi(a+h_0)h_1 + \varphi(a+h_0+h_1)h_2 + \cdots + \varphi(a+h_0+h_1+\cdots+h_{n-1})h_n.$$

Ist überdiess $h_0 = h_1 = h_2 = \cdots = h_n = h$, so wird $a + h_0 + h_1 + \cdots + h_n = a + nh = b$, daher $h = \frac{a-b}{n}$, folglich:

$$139) \quad f(b) - f(a) = h(\varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \cdots + \varphi(a+(n-1)h)).$$

Es wurde oben $\frac{df(x)}{dx}$ gleich $\varphi(x)$ gesetzt, es ist daher $df(x) = \varphi(x)dx$, folglich $\int \varphi(x)dx = f(x) + C$, und daher nach §. 78:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = f(b) - f(a).$$

Man erhält daher unter Berücksichtigung der Gleichung *No. 138*:

$$140) \quad \int_a^b \varphi(x)dx \\ = \varphi(a)h_0 + \varphi(a+h_0)h_1 + \varphi(a+h_0+h_1)h_2 + \cdots + \varphi(a+h_0+h_1+\cdots+h_{n-1})h_n,$$

und unter Berücksichtigung der Gleichung *No. 138*:

$$141) \quad \int_a^b \varphi(x)dx = h[\varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \cdots + \varphi(a+(n-1)h)].$$

Streng richtig sind diese Gleichungen nur, wenn in der ersten $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n$, und in der zweiten h wirklich als verschwindend klein werdende Grössen betrachtet werden. Ist dies nicht der Fall, so drücken jene Reihen auch nicht genau den Werth des bestimmten Integrals aus, sie geben ihn nur annähernd, es kann aber diese Annäherung, wie am Schlusse dieses Abschnittes gezeigt werden soll, beliebig ausgedehnt werden.

Es muss hier noch besonders bemerkt werden, dass $\varphi(x)$ zwischen den Grenzen von a und b continuirlich sein muss. Wäre $\varphi(x)$ discontinuirlich für irgend welche Werthe von $x=a$ bis $x=b$, so sind die Gleichungen *No. 140* und *141* nicht mehr anwendbar, weil ihre Ableitung die Continuität von $\varphi(x)$ voraussetzt.

Die Gleichungen *No. 140* und *141* enthalten die Bestätigung des oben aufgestellten Satzes, dass nämlich ein bestimmtes Integral als die Summe unendlich vieler verschwindend kleiner Grössen zu betrachten sei. Diese verschwindend kleine Grössen werden erhalten, wenn man in der gegebenen Function $\varphi(x)$

für x successiv unendlich viele, von a bis b durch gleiche oder ungleiche Zunahmen wachsende, Werthe setzt, und die Functionen, die man erhält, in gleicher Ordnung mit den verschwindend kleinen Grössen $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n$ multiplicirt.

108) Wenn c ein zwischen a und b liegender Werth ist, so dass man hat :

$$\begin{aligned} a + h_0 + h_1 + \dots + h_k &= c, \\ a + h_0 + h_1 + \dots + h_k + h_{k+1} + \dots + h_n &= b, \end{aligned}$$

so lässt sich leicht beweisen, dass

$$142) \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^c \varphi(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx$$

ist. Denn es ist :

$$\int_a^c \varphi(x) dx = \varphi(a)h_0 + \varphi(a+h_0)h_1 + \dots + \varphi(a+h_0+h_1+\dots+h_{k-1})h_k,$$

und

$$\begin{aligned} \int_c^b \varphi(x) dx &= \varphi(a+h_0+h_1+\dots+h_k)h_{k+1} \\ &+ \varphi(a+h_0+h_1+\dots+h_{k+1})h_{k+2} \\ &+ \dots \\ &+ \varphi(a+h_0+h_1+\dots+h_{n-1})h_n, \end{aligned}$$

folglich :

$$\begin{aligned} \int_a^c \varphi(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx \\ = \varphi(a)h_0 + \varphi(a+h_0)h_1 + \dots + \varphi(a+h_0+h_1+\dots+h_{n-1})h_n. \end{aligned}$$

Hält man diese Gleichung mit der Gleichung No. 138 zusammen, so erkennt man unmittelbar die Richtigkeit der oben aufgestellten Behauptung.

109) Ableitung der Werthe bestimmter Integrale aus unbestimmten Integralfunctionen. Die Ableitung eines bestimmten Integrals aus einem unbestimmten ist nach dem, was in §. 78 angeführt wurde, so einfach, dass es wohl kaum mehr als der Anführung einiger Beispiele bedarf, um das Verfahren deutlich zu machen.

Das unbestimmte Integral von $x^m dx$ ist:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Die Constante C ist willkürlich, und kann daher jedenfalls so gewählt werden, dass für $x=a$ das Integral verschwindet, wornach man erhält:

$$0 = \frac{a^{m+1}}{m+1} + C,$$

es wird daher:

$$C = -\frac{a^{m+1}}{m+1},$$

folglich:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

Setzt man $x=b$, so erhält man das bestimmte Integral

$$\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

Man erhält also das bestimmte Integral, wenn man in dem unbestimmten Integral zuerst für x die obere Grenze b der Veränderlichen und darauf die untere Grenze a setzt, und den letzten Ausdruck von dem ersten abzählt.

In einem zweiten Beispiele sei das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ zu finden.}$$

Es ist:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc}(\sin = x) + C,$$

daher:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc}(\sin = 1) - \text{Arc}(\sin = 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Es sei ferner das bestimmte Integral $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ aus dem unbestimmten abzuleiten. Es ist:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C,$$

folglich:

$$143) \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -0 + 1 = 1.$$

Nach der allgemeinen Reductionsformel No. 71 findet man:

$$\int \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{n+1} x^n \sqrt{1-x^2} + \frac{n}{n+1} \int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Setzt man $n=1$, so erhält man:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \text{Arc}(\sin = x) + C. \end{aligned}$$

Es ist daher:

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Auf ähnliche Weise findet man:

$$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}, \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\pi}{2}, \int_0^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4}{3.5}, \dots$$

und Allgemein:

$$144) \int_0^1 \frac{x^{2m} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5.7 \dots (2m-1)}{2.4.6.8 \dots 2m} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$145) \int_0^1 \frac{x^{2m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6.8 \dots 2m}{3.5.7.9 \dots (2m+1)}.$$

In einem andern Falle sei das bestimmte Integral $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ aus dem unbestimmten abzuleiten.

Es ist:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc}(\text{tg.} = x) + C,$$

folglich:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc}(\text{tg.} = \infty) - \text{Arc}(\text{tg.} = 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Dagegen würde sein:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc}(\text{tg.} = \infty) - \text{Arc}(\text{tg.} = 1) = \frac{\pi}{4}.$$

Es soll endlich das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x^2 \sin x dx}{1+a^2 \cos x^2}$$

aus dem unbestimmten abgeleitet werden.

Es ist:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x^2 \sin x dx}{1+a^2 \cos x^2} &= - \int \frac{\cos x^2 d \cos x}{1+a^2 \cos x^2} \\ &= - \int \left(\frac{1}{a^2} d \cos x - \frac{d \cos x}{a^2(1+a^2 \cos x^2)} \right) \\ &= - \frac{\cos x}{a^2} + \frac{1}{a^3} \text{Arc}(\text{tg.} = a \cos x) + C, \end{aligned}$$

hiernach findet man:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x^2 \sin x dx}{1+a^2 \cos x^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{\text{Arc}(\text{tg.} = a)}{a^3}.$$

110) Wenn die Herstellung eines unbestimmten Integrals nur durch eine vorangegangene Substitution gelingt, oder doch

hierdurch wesentlich erleichtert wird, so sind in der Ableitung des bestimmten Integrales die Grenzen so festzustellen, wie dies die Abhängigkeit der durch Substitution eingeführten Veränderlichen von der ursprünglich Variablen verlangt.

Gesetzt etwa es sei das bestimmte Integral $\int_a^b \varphi(x) dx$ zu finden; zugleich sei $x=f(y)$ die Substitution, nach welcher das unbestimmte Integral leichter herzustellen ist. Man hat hiernach:

$$\int \varphi(x) dx = \int \varphi[f(y)] \frac{df(y)}{dy} dy = F(y) + C.$$

Die Grenzwerte für y , die den Grenzen $x=a$ und $x=b$ entsprechen, sind offenbar durch die Gleichungen $a=f(y)$, $b=f(y)$ bestimmt. Es folgt aus der ersten dieser Gleichungen $y=\psi(a)$, und aus der zweiten $y=\psi(b)$. Der erste dieser Werte drückt die untere Grenze, der zweite die obere Grenze des Integrals aus, so dass man hat:

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} \varphi[f(y)] \frac{df(y)}{dy} dy.$$

Würde man in der durch Integration erhaltenen Function $F(y)+C$ die Variable y wieder durch x ausdrücken, wie dies unter Zuziehung der Gleichung $x=f(y)$ immer geschehen kann, so wären natürlich die früheren Grenzen beizubehalten. Welcher von beiden Wegen der bequemere ist lässt sich nicht im Allgemeinen entscheiden; in speciellen Fällen hat diese Entscheidung keine Schwierigkeit.

Es soll z. B. das bestimmte Integral $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{a+b \cos x^2}$ hergestellt werden.

Setzt man $x=\text{Arc}(\text{tg.}=y)$, daher $dx = \frac{dy}{1+y^2}$ und $\cos x^2 = \frac{1}{1+y^2}$, so erhält man:

$$\int \frac{dx}{a+b \cos x^2} = \int \frac{dy}{a+b+ay^2}.$$

Führt man die Integration aus, so findet man:

$$\int \frac{dy}{a+b+ay^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+ab}} \cdot \text{Arc} \left(\text{tg.}=y \cdot \sqrt{\frac{a}{a+b}} \right) + C.$$

Die Integrationsgrenzen sind aus den Gleichungen

$$0 = \text{Arc. (tg. = y)} \text{ und } \frac{\pi}{2} = \text{Arc. (tg. = y)}$$

zu bestimmen. Die erste gibt $y=0$, und die zweite $y = \infty$, es ist daher:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+b \cos x^2} = \int_0^{\infty} \frac{dy}{a+b+ay^2}.$$

Nimmt man das vorher erhaltene unbestimmte Integral zu Hülfe, so findet man:

$$\int_0^{\infty} \frac{dy}{a+b+ay^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2+ab}}.$$

111) Die Methoden der Ableitung neuer Integralausdrücke aus anderen schon gefundenen bleiben begreiflich dieselben wie jene, die schon bei Herstellung unbestimmter Integrale entwickelt wurden. Es zeigt sich hier besonders die in §. 103 entwickelte Methode sehr fruchtbar, die eben desshalb unter Anwendungen auf einige specielle Fälle weiter ausgeführt werden soll.

Zunächst führen die in §. 103 angestellten Betrachtungen zu folgender, der Formel *No. 136* entsprechenden, Gleichung:

$$146) \frac{d \int_{\alpha}^{\beta} f(x, a) dx}{da} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d f(x, a)}{da} \cdot dx,$$

wo a unabhängig von x und α , β unabhängig von a sind. Es schliesst sich an diese Gleichung unmittelbar die allgemeinere

$$147) \frac{d^n \int_{\alpha}^{\beta} f(x, a) dx}{da^n} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d^n f(x, a)}{da} \cdot dx$$

an, welche ausdrückt, dass es gleichgültig ist, ob man zuerst in Hinsicht x , innerhalb der Grenzen α und β , das Integral nimmt, und darauf n mal in Hinsicht a differentirt, oder ob man zuerst n mal in Hinsicht a differentirt und darauf in Hinsicht x innerhalb derselben Grenzen integrirt.

Einige Beispiele werden am besten erläutern wie auf diesem Wege aus schon bekannten Integralausdrücken andere abgeleitet werden.

Es ist:

$$\int \sin 2ax \, dx = -\frac{\cos 2ax}{2a} + C,$$

folglich:

$$\int_0^\pi \sin 2ax \, dx = \frac{1 - \cos 2a\pi}{2a} = 0,$$

wo a eine ganze Zahl ist. Differentirt man in Hinsicht a , so erhält man:

$$\int_0^\pi \cos 2ax \cdot 2x \cdot dx = \frac{4a\pi \sin 2a\pi - 2(1 - \cos 2a\pi)}{4a^2} = 0.$$

Differentirt man von Neuem, so findet man:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin 2ax \cdot (2x)^2 dx &= -\frac{2\pi^2 \cdot \cos 2a\pi}{a} + \frac{2\pi \cdot \sin 2a\pi}{a^2} - \frac{1 - \cos 2a\pi}{a^3} \\ &= -\frac{2\pi^2}{a}. \end{aligned}$$

Es ist, wie aus diesem Beispiel deutlich genug hervorgeht, stets der ganze Ausdruck des bestimmten Integrals zu differenzieren, und nicht das Endresultat desselben. Denn es kann sein, dass ein bestimmtes Integral Null wird, ohne dass das Differential desselben in Hinsicht einer andern Veränderlichen in Null übergeht.

In einem zweiten Beispiele sei der Bogen x mit einer ungeraden Zahl $2a+1$ vervielfacht.

Es ist:

$$\int \sin (2a+1)x \cdot dx = -\frac{\cos (2a+1)x}{2a+1} + C,$$

es wird daher:

$$\int_0^\pi \sin (2a+1)x \cdot dx = \frac{1 - \cos (2a+1)\pi}{2a+1} = \frac{2}{2a+1}.$$

Differentirt man in Hinsicht a , so findet man:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos (2a+1)x \cdot 2x \cdot dx &= \frac{2\pi \sin (2a+1)\pi}{2a+1} - \frac{2(1 - \cos (2a+1)\pi)}{(2a+1)^2} \\ &= -\frac{4}{(2a+1)^2}. \end{aligned}$$

Differentirt man von Neuem, so erhält man:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \sin(2a+1)x \cdot (2x)^2 dx \\ &= -2\pi \frac{2\pi(2a+1) \cos(2a+1)\pi - 2 \sin(2a+1)\pi}{(2a+1)^2} \\ &+ \frac{4\pi(2a+1)^2 \sin(2a+1)\pi - 8(2a+1)(1 - \cos(2a+1)\pi)}{(2a+1)^4} \\ &= \frac{4\pi^2}{2a+1} - \frac{16}{(2a+1)^3}. \end{aligned}$$

Zu einem dritten Beispiel diene die Formel:

$$\int \cos 2ax \cdot dx = \frac{\sin 2ax}{2a} + C.$$

Es folgt aus derselben:

$$\int_0^{\pi} \cos 2ax \cdot dx = \frac{\sin 2a\pi}{2a} = 0.$$

Differentirt man wiederholt in Hinsicht a, so findet man:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin 2ax \cdot 2x \cdot dx &= -\frac{\cos 2a\pi \cdot 4a\pi - 2 \sin 2a\pi}{4a^2} \\ &= -\frac{\pi}{a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos 2ax \cdot (2x)^2 dx &= \frac{\sin 2a\pi \cdot 2a\pi^2 - \pi \cdot \cos 2a\pi}{a^2} \\ &+ \frac{\cos 2a\pi \cdot 4a^2\pi - 4a \sin 2a\pi}{4a^4} \\ &= \frac{2\pi}{a^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin 2ax \cdot (2x)^3 dx &= -\frac{\cos 2a\pi \cdot 4a\pi^3 - 2\pi^2 \sin 2a\pi}{a^2} \\ &+ \frac{\sin 2a\pi \cdot 4a^2\pi^2 + 4a\pi \cos 2a\pi}{a^4} \\ &+ \frac{\cos 2a\pi \cdot 2a^3\pi - 3a^2 \sin 2a\pi}{a^6} \\ &= -\frac{4\pi^3}{a} + \frac{6\pi}{a^3}. \end{aligned}$$

Endlich folgt aus der Formel:

$$\int \cos(2a+1)x \cdot dx = \frac{\sin(2a+1)x}{2a+1} + C,$$

wenn innerhalb der Grenzen 0 und π das Integral genommen wird,

$$\int_0^{\pi} \cos(2a+1)x \cdot dx = \frac{\sin(2a+1)\pi}{2a+1} = 0.$$

Durch wiederholte Differentiation in Hinsicht a erhält man:

$$\int_0^\pi \sin(2a+1)x \cdot 2x \cdot dx = \frac{-\cos(2a+1)\pi \cdot 2\pi(2a+1) + 2\sin(2a+1)\pi}{(2+1)^2}$$

$$= \frac{2\pi}{2a+1}.$$

$$\int_0^\pi \cos(2a+1)x \cdot (2x)^2 \cdot dx$$

$$= \frac{\sin(2a+1)\pi \cdot 4\pi^2 \cdot (2a+1) + 4\pi \cdot \cos(2a+1)\pi}{(2a+1)^2}$$

$$+ \frac{\cos(2a+1)\pi \cdot 4\pi \cdot (2a+1)^2 - 8(2a+1)\sin(2a+1)\pi}{(2a+1)^4}$$

$$= -\frac{8\pi}{(2a+1)^2}.$$

$$\int_0^\pi \sin(2a+1)x \cdot (2x)^3 \cdot dx$$

$$= -\frac{\cos(2a+1)\pi \cdot 8\pi^3 \cdot (2a+1) - 8\pi^2 \sin(2a+1)\pi}{(2a+1)^2}$$

$$+ \frac{\sin(2a+1)\pi \cdot 16\pi^2 \cdot (2a+1)^2 - 32\pi \cos(2a+1)\pi}{(2a+1)^4}$$

$$+ \frac{\cos(2a+1)\pi \cdot 16\pi(2a+1)^3 - 48(2a+1)^2 \sin(2a+1)\pi}{(2a+1)^6}$$

$$= \frac{8\pi^3}{2a+1} - \frac{48\pi}{(2a+1)^3}.$$

Verfolgt man den hier eingeschlagenen Weg weiter, so findet man die Werthe der bestimmten Integrale

$$\int_0^\pi \sin 2ax \cdot (2x)^3 dx, \int_0^\pi \sin 2ax \cdot (2x)^4 dx,$$

u. s. w. Bei einiger Aufmerksamkeit entdeckt man bald das Bildungsgesetz dieser Integrale, so dass man allgemein die Werthe von

$$\int_0^\pi \sin 2ax \cdot (2x)^{2n} dx, \int_0^\pi \sin 2ax \cdot (2x)^{2n+1} dx,$$

u. s. w. angeben kann. Es kann nützlich sein solche allgemeinere Formel aufzusuchen, doch darf man nicht vergessen, dass hiermit der Wissenschaft keine wesentlichen Dienste geleistet werden. Es tritt keine neue Idee in die Untersuchung ein, es ist nur eine Verallgemeinerung eines speciellen Falles, der den Grundgedanken einschliesst. Solche Verallgemeinerungen sind aber namentlich in der Mathematik von untergeordneterer Bedeutung, weil die mathematische Zeichensprache es beinahe

von selbst mit sich führt, dass die Symmetrie der Resultate, die ein wiederholtes Verfahren erzeugt, sogleich erkannt wird. Es mag daher genügen hier einige der Resultate anzuführen, zu welchen man durch wiederholte Differentiation in den oben angeführten Beispielen gelangt. Man findet:

$$\int_0^{\pi} \sin 2ax \cdot (2x)^{2n} dx = 2^{2n} \left[-\frac{\pi^{2n}}{2a} + \frac{\pi^{2n-2}}{(2a)^3} 2n(2n-1) \right. \\ \left. - \frac{\pi^{2n-4}}{(2a)^5} 2n(2n-1)(2n-2)(2n-3) \right. \\ \left. + \dots \right. \\ \left. \pm \frac{\pi^2}{(2a)^{2n-1}} 2n(2n-1)(2n-2) \dots 3 \right].$$

$$\int_0^{\pi} \sin 2ax \cdot (2x)^{2n+1} dx = 2^{2n+1} \left[-\frac{\pi^{2n+1}}{2a} + \frac{\pi^{2n-1}}{(2a)^3} (2n+1) \cdot 2n \right. \\ \left. - \frac{\pi^{2n-3}}{(2a)^5} (2n+1) 2n(2n-1)(2n-2) \right. \\ \left. + \dots \right. \\ \left. \pm \frac{\pi}{(2a)^{2n+1}} (2n+1) 2n(2n-1) \dots 2 \right].$$

$$\int_0^{\pi} \sin (2a+1)x \cdot (2x)^{2n} dx = 2^{2n} \left[\frac{\pi^{2n}}{2a+1} - \frac{\pi^{2n-2}}{(2a+1)^3} 2n(2n-1) \right. \\ \left. + \frac{\pi^{2n-4}}{(2a+1)^5} 2n(2n-1)(2n-2)(2n-3) \right. \\ \left. - \dots \right. \\ \left. \pm 2 \frac{\pi^0}{(2a+1)^{2n+1}} 2n(2n-1)(2n-2) \dots 1 \right].$$

$$\int_0^{\pi} \sin (2a+1)x \cdot (2x)^{2n+1} dx = 2^{2n+1} \left[\frac{\pi^{2n+1}}{2a+1} - \frac{\pi^{2n-1}}{(2a+1)^3} (2n+1) 2n \right. \\ \left. + \frac{\pi^{2n-3}}{(2a+1)^5} (2n+1) 2n(2n-1)(2n-2) \right. \\ \left. - \dots \right. \\ \left. \pm \frac{\pi}{(2a+1)^{2n+1}} (2n+1) 2n(2n-1) \dots 2 \right].$$

Diese Formeln sind gültig für alle Fälle in welchen n und a ganze Zahlen sind.

112) Wenn eine der Grenzen eine Function jener Grösse ist, in Bezug auf welche das Differential genommen werden

soll, so fällt das Differential des Integral's zusammengesetzter aus. Die Principien der Differentialrechnung geben auch hier das Mittel an die Hand das Differential zu bestimmen. Man geht von der Differenz aus und zu dem speciellen Falle, dem Differential, über.

Aus der Gleichung:

$$m) \int f(x, a) dx = \varphi(x, a) + C$$

folgt

$$\int_a^A f(x, a) dx = \varphi(A, a) - \varphi(a, a).$$

Für die Differenz dieses bestimmten Integrals in Hinsicht a erhält man:

$$\frac{\Delta \int_a^A f(x, a) dx}{\Delta a} = \frac{\int_a^{A+\Delta A} f(x, a+\Delta a) dx - \int_a^A f(x, a) dx}{\Delta a},$$

wo vorausgesetzt wurde, dass A eine Function von a ist und in $A + \Delta A$ übergeht, wenn a um Δa zunimmt.

Da

$$\int_a^{A+\Delta A} f(x, a+\Delta a) dx = \int_a^A f(x, a+\Delta a) dx + \int_A^{A+\Delta A} f(x, a+\Delta a) dx$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta \int_a^A f(x, a) dx}{\Delta a} \\ &= \frac{\int_a^A f(x, a+\Delta a) dx - \int_a^A f(x, a) dx}{\Delta a} + \frac{\int_A^{A+\Delta A} f(x, a+\Delta a) dx}{\Delta a}. \end{aligned}$$

Das letzte Glied dieser Gleichung lässt sich nach (m) wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \int_A^{A+\Delta A} f(x, a+\Delta a) dx &= \varphi(A+\Delta A, a+\Delta a) - \varphi(A, a+\Delta a) \\ &= \frac{\Delta \varphi(A, a+\Delta a)}{\Delta A} \cdot \Delta A. \end{aligned}$$

Es ist daher:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta \int_a^A f(x,a) dx}{\Delta a} \\
&= \frac{\int_a^A f(x,a+\Delta a) dx - \int_a^A f(x,a) dx}{\Delta a} + \frac{\Delta \varphi(A,a+\Delta a)}{\Delta A} \cdot \frac{\Delta A}{\Delta a} \\
&= \frac{\Delta \int_a^A f(x,a) dx}{\Delta a} + \frac{\Delta \varphi(A,a+\Delta a)}{\Delta A} \cdot \frac{\Delta A}{\Delta a}.
\end{aligned}$$

Geht man zu dem speciellen Falle über, in welchem Δa verschwindend klein wird, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung No. 146:

$$\frac{d \int_a^A f(x,a) dx}{da} = \int_a^A \frac{df(x,a)}{da} dx + \frac{d\varphi(A,a)}{dA} \cdot \frac{dA}{da}.$$

Auch hier lässt sich das letzte Glied in einer passenden Form darstellen. Es folgt nämlich aus (m) dass:

$$f(A,a) = \frac{d\varphi(A,a)}{dA}$$

ist. Man erhält hierdurch:

$$148) \quad \frac{d \int_a^A f(x,a) dx}{da} = \int_a^A \frac{df(x,a)}{da} dx + f(A,a) \frac{dA}{da}.$$

Wenn daher $\int_a^A f(x,a) dx$ bekannt ist, so kann mit Hülfe der oben erhaltenen Gleichung ein neues Integral $\int_a^A \frac{df(x,a)}{da} dx$ abgeleitet werden.

Verfolgt man den hier eingeschlagenen Weg weiter, so findet man:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \int_a^A f(x,a) dx}{da^2} &= \int_a^A \frac{d^2 f(x,a)}{da^2} dx + 2 \frac{df(A,a)}{da} \cdot \frac{dA}{da} \\
&\quad + f(A,a) \cdot \frac{d^2 A}{da^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3 \int_a^A f(x,a) dx}{da^3} &= \int_a^A \frac{d^3 f(x,a)}{da^3} dx + 3 \frac{d^2 f(A,a)}{da^2} \cdot \frac{dA}{da} \\
&\quad + 3 \frac{df(A,a)}{da} \cdot \frac{d^2 A}{da^2} \\
&\quad + f(A,a) \cdot \frac{d^3 A}{da^3},
\end{aligned}$$

und Allgemein:

$$\begin{aligned}
 149) \quad \frac{d^n \int_a^A f(x,a) dx}{da^n} &= \int_a^A \frac{d^n f(x,a)}{da^n} dx + n \frac{d^{n-1} f(A,a)}{da^{n-1}} \cdot \frac{dA}{da} \\
 &+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^{n-2} f(A,a)}{da^{n-2}} \cdot \frac{d^2 A}{da^2} \\
 &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^{n-3} f(A,a)}{da^{n-3}} \cdot \frac{d^3 A}{da^3} \\
 &+ \dots \\
 &+ f(A,a) \cdot \frac{d^n A}{da^n}.
 \end{aligned}$$

113) Sind endlich die beiden Grenzen des bestimmten Integrals Functionen jener Grösse, in Bezug auf welche differentirt werden soll, so ist zur Bestimmung desselben ein ähnliches Verfahren, wie im vorhergehenden §. zu befolgen.

Gesetzt es sei:

$$\int f(x,a) dx = \varphi(x,a) + C$$

Es folgt hieraus:

$$\int_B^A f(x,a) dx = \varphi(A,a) - \varphi(B,a).$$

Nimmt man die Differenz dieses Integrals in Bezug auf a , und setzt man voraus, dass zugleich A und B Functionen von a sind, so hat man:

$$\frac{\Delta \int_B^A f(x,a) dx}{\Delta a} = \frac{\int_{B+\Delta B}^{A+\Delta A} f(x,a+\Delta a) dx - \int_B^A f(x,a) dx}{\Delta a}.$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned}
 &\int_{B+\Delta B}^{A+\Delta A} f(x,a+\Delta a) dx \\
 &= \int_B^A f(x,a+\Delta a) dx + \int_A^{A+\Delta A} f(x,a+\Delta a) dx - \int_B^{B+\Delta B} f(x,a+\Delta a) dx,
 \end{aligned}$$

Hierdurch erhält man:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\Delta \int_B^A f(x,a) dx}{\Delta a} \\
 &= \int_B^A \frac{\Delta f(x,a+\Delta a) dx}{\Delta a} + \frac{\int_A^{A+\Delta A} f(x,a+\Delta a) dx}{\Delta a} - \frac{\int_B^{B+\Delta B} f(x,a+\Delta a) dx}{\Delta a}.
 \end{aligned}$$

Berücksichtigt man dass:

$$\frac{\int_A^{A+\Delta A} f(x, a+\Delta a) dx}{\Delta a} = \frac{\Delta \varphi(A, a+\Delta a)}{\Delta A} \cdot \frac{\Delta A}{\Delta a},$$

$$\frac{\int_B^{B+\Delta B} f(x, a+\Delta a) dx}{\Delta a} = \frac{\Delta \varphi(B, a+\Delta a)}{\Delta B} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta a},$$

so findet man:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta \int_B^A f(x, a) dx}{\Delta a} \\ &= \int_B^A \frac{\Delta f(x, a+\Delta a) dx}{\Delta a} + \frac{\Delta \varphi(A, a+\Delta a)}{\Delta A} \cdot \frac{\Delta A}{\Delta a} - \frac{\Delta \varphi(B, a+\Delta a)}{\Delta B} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta a}. \end{aligned}$$

Geht man zu dem speciellen Falle über, in welchem Δa verschwindend klein wird, so erhält man:

$$\frac{d \int_B^A f(x, a) dx}{da} = \int_B^A \frac{df(x, a) dx}{da} + \frac{d\varphi(A, a)}{dA} \cdot \frac{dA}{da} - \frac{d\varphi(B, a)}{dB} \cdot \frac{dB}{da}.$$

Da endlich:

$$\frac{d\varphi(A, a)}{dA} = f(A, a), \quad \frac{d\varphi(B, a)}{dB} = f(B, a)$$

ist, so hat man:

$$150) \quad \frac{d \int_B^A f(x, a) dx}{da} = \int_B^A \frac{df(x, a) dx}{da} + f(A, a) \frac{dA}{da} - f(B, a) \frac{dB}{da}.$$

114) Es lässt sich, gestützt auf die Untersuchungen der Differentialrechnung, noch eine andere Methode herstellen, aus schon bekannten Integralen neue Integralausdrücke abzuleiten. In §. 19 wurde gezeigt, dass es gleichgültig ist ob eine Function $F(x, y)$ zuerst in Hinsicht x und dann in Hinsicht y , oder zuerst in Hinsicht y und dann in Hinsicht x differentirt wird. Man kann die Ergebnisse der successiven Differentiationen in folgender Weise ausdrücken:

$$\begin{aligned} & F(x, y), \quad F(x, y), \\ & \frac{dF(x, y)}{dx} = f(x, y), \quad \frac{dF(x, y)}{dy} = f_1(x, y), \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dy} \cdot \frac{dF(x, y)}{dx} = \varphi(x, y), \quad \frac{d}{dx} \cdot \frac{dF(x, y)}{dy} = \varphi(x, y).$$

Man hat hiernach :

$$d\left(\frac{dF(x,y)}{dx}\right) = \varphi(x,y)dy,$$

daher :

$$\int \varphi(x,y) dy = \frac{dF(x,y)}{dx};$$

es ist aber :

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = f(x,y),$$

folglich :

$$\int_b^B \varphi(x,y) dy = f(x,B) - f(x,b),$$

daher auch :

$$\int dx \int_b^B \varphi(x,y) dy = \int f(x,B) dx - \int f(x,b) dx.$$

Nach den oben aufgestellten Differentialgleichungen ist aber :

$$\int f(x,y) dx = F(x,y) + C,$$

es ist daher :

$$\int f(x,B) dx = F(a,B) + C, \quad \int f(x,b) dx = F(x,b) + C.$$

Man erhält hiernach :

$$\int_a^A dx \int_b^B \varphi(x,y) dy = F(A,B) - F(a,B) - F(A,b) + F(a,b).$$

Zu demselben Resultate führen die in der zweiten Columnne aufgestellten Differentialgleichungen. Es folgt nämlich aus der letzten jener Gleichungen

$$d\left(\frac{dF(x,y)}{dy}\right) = \varphi(x,y)dx,$$

es ist daher :

$$\int \varphi(x,y) dx = \frac{dF(x,y)}{dy} = f_1(x,y),$$

folglich :

$$\int_a^A \varphi(x,y) dx = f_1(A,y) - f_1(a,y),$$

daher auch :

$$\int dy \int_a^A \varphi(x,y) dx = \int f_1(A,y) dy - \int f_1(a,y) dy.$$

Es ist aber:

$$\int f_1(A, y) dy = F(A, y) + C, \int f_1(a, y) dy = F(a, y) + C.$$

Man erhält hiernach:

$$\int_b^B dy \int_a^A \varphi(x, y) dx = F(A, B) - F(A, b) - F(a, B) + F(a, b).$$

Hält man dieses Resultat mit dem früheren zusammen, so erkennt man, dass:

$$151) \int_b^B dy \int_a^A \varphi(x, y) dx = \int_a^A dx \int_b^B \varphi(x, y) dy$$

ist. Es geht hieraus hervor, dass es gleichgültig ist, ob man zuerst in Hinsicht x innerhalb der Grenzen a, A , und dann in Hinsicht y innerhalb der Grenzen b, B integriert, oder ob man die umgekehrte Ordnung befolgt.

In wiefern mit Hülfe dieses Satzes aus bekannten Integralen andere abgeleitet werden können, soll sogleich an einigen Beispielen gezeigt werden.

1tes Beispiel.

Es ist:

$$\int e^{-ax} \sin bx \, dx = -\frac{e^{-ax} \cos bx}{b} - \int \frac{\cos bx \cdot e^{-ax} a}{b} dx,$$

und

$$\int e^{-ax} \sin bx \, dx = -\frac{e^{-ax} \sin bx}{a} + \int \frac{\cos bx \cdot e^{-ax} b}{a} dx.$$

Addirt man beide Gleichungen, nachdem zuvor die erste mit $\frac{b}{a}$ und die zweite mit $\frac{a}{b}$ multiplicirt wurde, so findet man:

$$\int e^{-ax} \sin bx \, dx = -\frac{e^{-ax}(b \cos bx + a \sin bx)}{a^2 + b^2}.$$

Es ist hiernach:

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

folglich:

$$\int_a^\beta da \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx = \int_a^\beta \frac{b}{a^2 + b^2} da = \text{Arc} \left(\text{tang} = \frac{a}{b} \right) + C.$$

Hiernach wird:

$$\int_a^\beta da \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx = \text{Arc} \left(\text{tang} = \frac{\beta}{b} \right) - \text{Arc} \left(\text{tang} = \frac{a}{b} \right),$$

und

$$\int_0^{\infty} da \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Nach No. 151 ist aber:

$$\int_a^{\beta} da \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx = \int_0^{\infty} dx \int_a^{\beta} e^{-ax} \sin bx \, da,$$

und

$$\int_0^{\infty} da \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, da.$$

Da nun

$$\int e^{-ax} \sin bx \, da = -\frac{e^{-ax} \sin bx}{x} + C,$$

so ist:

$$\int_a^{\beta} e^{-ax} \sin bx \, da = \frac{e^{-ax} - e^{-\beta x}}{x} \sin bx,$$

und

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, da = \frac{\sin bx}{x}.$$

Führt man diese Werthe ein, so erhält man folgende Integralformeln:

$$152) \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-\beta x}}{x} \sin bx \, dx = \text{Arc}\left(\text{tang} = \frac{\beta}{b}\right) - \text{Arc}\left(\text{tang} = \frac{a}{b}\right),$$

$$153) \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Auf ganz ähnlichem Wege findet man, wenn man von dem bekannten Integrale

$$\int e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{-ax}(b \sin bx - a \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

ausgeht, folgende Integrale:

$$154) \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-\beta x}}{x} \cos bx \, dx = \frac{1}{2} \lg \frac{\beta^2 + b^2}{a^2 + b^2},$$

$$155) \int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{x} \, dx = \infty.$$

2tes Beispiel.

Zu einem zweiten Beispiele diene ein von Laplace aufgefundenes Integral, welches schon seiner häufigen Anwendungen halber bemerkenswerth ist.

Es soll bestimmt werden das Integral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Setzt man $x=az$, daher $dx=adz$, so hat man:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-a^2 z^2} adz,$$

denn es wird z Null und unendlich, wenn x Null und unendlich wird.

Setzt man zweitens $x=a$, daher $dx=da$, so hat man:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-a^2} da.$$

Es ist daher:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-a^2} da \int_0^\infty e^{-a^2 z^2} adz,$$

folglich:

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_0^\infty dz \int_0^\infty e^{-a^2(1+z^2)} a da.$$

Es ist aber:

$$\int_0^\infty e^{-a^2(1+z^2)} a da = -\frac{e^{-a^2(1+z^2)}}{2(1+z^2)},$$

daher:

$$\int_0^\infty e^{-a^2(1+z^2)} a da = \frac{1}{2(1+z^2)}.$$

Hierdurch wird:

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_0^\infty \frac{dz}{2(1+z^2)} = \frac{\pi}{4},$$

folglich:

$$156) \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

115) Euler'sche Integrale. Zwei bestimmte Integrale sind theils wegen ihrer analytischen Beziehungen, theils wegen ihres häufigen Vorkommens besonders wichtig. Es wurden dieselben von Legendre die Euler'schen Integrale genannt, weil Euler sie zuerst entwickelt und ihre wichtigsten Relationen aufgefunden hat. Diese Integrale sind:

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx.$$

Das erste dieser Integrale hat Euler durch die Symbole (p, q) bezeichnet, das zweite wird gewöhnlich durch die Zeichen $\Gamma(n)$ angegeben, so dass gesetzt wird:

$$(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx,$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx.$$

Das Euler'sche Integral der zweiten Art kann auch in einer andern Form auftreten, denn setzt man $e^{-x} = z$, daher $dx = -\frac{dz}{z}$ und $x = -\lg. z$, so erhält man:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx = -\int_1^0 \left(\lg \frac{1}{z}\right)^{n-1} dz,$$

folglich auch:

$$\Gamma(n) = \int_0^1 \left(\lg \frac{1}{z}\right)^{n-1} dz.$$

Es soll zunächst gezeigt werden in wie weit jedes der Euler'schen Integrale bestimmt werden kann, und darauf soll der Zusammenhang dieser Integrale dargelegt werden.

Das Euler'sche Integral der ersten Art führt durch theilweises Integriren zu folgender Gleichung:

$$\int x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{x^p (1-x)^{q-1}}{p} + \frac{q-1}{p} \int x^p (1-x)^{q-2} dx;$$

es ist hiernach:

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-2} dx.$$

Unter Anwendung eben dieser Formel findet man:

$$\int_0^1 x^p (1-x)^{q-2} dx = \frac{q-2}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-3} dx,$$

$$\int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-3} dx = \frac{q-3}{p+2} \int_0^1 x^{p+2} (1-x)^{q-4} dx,$$

Führt man diese Werthe successiv ein, so erhält man unter der Voraussetzung, dass p und q ganze Zahlen bezeichnen,

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{(q-1)(q-2)(q-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{p(p+1)(p+2) \dots (p+q-2)} \int_0^1 x^{p+q-2} dx.$$

Es ist aber:

$$\int_0^1 x^{p+q-2} dx = \frac{x^{p+q-1}}{p+q-1},$$

daher:

$$\int_0^1 x^{p+q-2} dx = \frac{1}{p+q-1}.$$

Hierdurch wird:

$$157) \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{(q-1)(q-2)(q-3)\dots 3.2.1}{p(p+1)(p+2)\dots(p+q-2)(p+q-1)},$$

oder:

$$(p, q) = \frac{(q-1)(q-2)(q-3)\dots 3.2.1}{p(p+1)(p+2)\dots(p+q-2)(p+q-1)}.$$

Das Euler'sche Integral der zweiten Art führt durch theilweise Integration zu folgender Gleichung:

$$\int e^{-x} x^{n-1} dx = \frac{e^{-x} x^n}{n} + \frac{1}{n} \int e^{-x} x^n dx;$$

es ist daher:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-x} x^n dx.$$

Man hat daher nach der früheren Bezeichnung:

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n},$$

folglich:

$$158) \Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

Aus dieser Formel folgt:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1),$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1\Gamma(1),$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2.1\Gamma(1),$$

$$\dots$$

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\dots 3.2.1\Gamma(1).$$

Es ist aber:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1,$$

daher:

$$159) \Gamma(n) = (n-1)(n-2)\dots 3.2.1,$$

wo vorausgesetzt wurde, dass n eine ganze positive Zahl ist.

Setzt man in No. 158 für n successiv $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{2n-1}{2}$, so erhält man:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

...

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Es ist aber:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx;$$

setzt man hierin $x = z^2$, $dx = 2z dz$, so wird

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} 2 dz,$$

es ist daher nach *No. 156*:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

folglich:

$$160) \quad \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

116) Der Zusammenhang beider Euler'schen Integrale, nach welchem das Integral der ersten Art als eine Function des Integrals der zweiten Art erscheint, ergibt sich aus folgenden Betrachtungen.

Es ist nach *No. 159*:

$$\Gamma(q) = (q-1)(q-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

und aus *No. 158* folgt:

$$\Gamma(p+q) = (p+q-1)(p+q-2) \cdots (p+1)p\Gamma(p),$$

es ist daher:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{(q-1)(q-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(p+q-1)(p+q-2) \cdots (p+1)p},$$

welches derselbe Ausdruck ist, der in *No. 157* für das Euler'sche Integral der ersten Art gefunden wurde, so dass man hat:

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

oder:

$$161) \quad (p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Diese Gleichung gibt den Zusammenhang der beiden Euler'schen Integrale an. Zugleich geht aus derselben hervor, dass

die Eigenschaften der Integrale der ersten Art aus denen der zweiten Art abgeleitet werden können.

Von den Euler'schen Integralen hängen viele andere Integrale ab. Sie besitzen hierdurch auch für die Anwendungen der Integralrechnung eine grössere Wichtigkeit. Die ersten Arbeiten über diesen Gegenstand rühren von Euler her und finden sich in Euleri Inst. calc. int. Tom. I. Cap. VIII. IX.; ferner in einer Abhandlung in der Nov. Act. Acad. Petross. Tom. V. Die wichtigsten Erweiterungen und Berechnungen rühren von Legendre her und sind in seinen Exercices de calcul intégral enthalten. Eine Zusammenstellung der wichtigsten Punkte dieser Untersuchungen nebst Zusätzen hat J. A. Grunert im Supplemente zu Klügel's Wörterbuch Art. „Bestimmtes Integral“ gegeben.

117) Näherungsweise Bestimmung bestimmter Integrale. In den Anwendungen der Integralrechnung auf Geometrie und Mechanik hängt alles davon ab zuletzt die numerischen Werthe bestimmter Integrale zu kennen. Nun ist die Zahl der Differentialformeln, deren Integrale sich bestimmen lassen, gegen jene, für welche dies nicht der Fall ist, nur klein zu nennen; um so wichtiger ist es eine Methode aufzusuchen, durch welche näherungsweise der Werth bestimmter Integrale sich angeben lässt. Eine jede Methode, die hier in Anwendung kommen kann, wird in einer ohne Ende fortlaufenden Reihe den Werth des Integrales ausdrücken, es ist daher wesentlich darauf zu achten, dass die Reihe rasch convergire, und ebenso ist für praktische Anwendungen der Werth verschiedener Methoden aus eben diesem Gesichtspunkte zu beurtheilen.

Schon in §. 107 wurde gezeigt, wenn aus einer Reihe von Functionen

$$f(x), f(x+h), f(x+2h), \dots f(x+nh)$$

eine zweite Reihe

$$\varphi(x), \varphi(x+h), \varphi(x+2h), \dots \varphi(x+nh)$$

so abgeleitet wird, dass

$$\varphi(x) = \frac{df(x)}{dx}, \varphi(x+h) = \frac{df(x+h)}{d(x+h)}, \varphi(x+2h) = \frac{df(x+2h)}{d(x+2h)}, \dots$$

ist, so sei immer

$$f(x+nh) - f(x) = h[\varphi(x) + \varphi(x+h) + \varphi(x+2h) + \dots + \varphi(x+(n-1)h)],$$

oder, wenn man wie dort $x=a$, $x+nh=b$ setzt, so sei

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \varphi(x) dx = h[\varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \dots + \varphi(a+(n-1)h)].$$

Diese Gleichung ist aber nur unter der Voraussetzung richtig, dass h eine verschwindend kleine Grösse ist. Wenn nun aber dem h ein endlicher, wiewohl immer sehr kleiner Werth beigelegt wird, so kann offenbar die obige Reihe nicht mehr als der wahre Werth des bestimmten Integrales $\int_a^b \varphi(x) dx$ betrachtet werden. Annähernd wird sie noch immer den Werth des Integrals ausdrücken, und um so mehr je kleiner h gewählt wird, aber stets bleibt ein Fehler zurück, wenn auch für h eine noch so kleine Zahl gesetzt wird. Diesen Fehler zu vermindern, und also den Werth des Integrals genauer zu erhalten, ist der Zweck der nun sogleich näher zu entwickelnden Methode.

Es seien wieder:

$$f(x), f(x+h), f(x+2h), \dots, f(x+nh)$$

die Glieder einer Reihe, aus welcher andere Reihen

$$\varphi(x), \varphi(x+h), \varphi(x+2h), \dots, \varphi(x+nh),$$

$$\varphi^I(x), \varphi^I(x+h), \varphi^I(x+2h), \dots, \varphi^I(x+nh),$$

$$\varphi^{II}(x), \varphi^{II}(x+h), \varphi^{II}(x+2h), \dots, \varphi^{II}(x+nh),$$

so abgeleitet werden, dass ist:

$$\varphi(x) = \frac{df(x)}{dx}, \quad \varphi(x+h) = \frac{df(x+h)}{d(x+h)}, \dots$$

$$\varphi^I(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}, \quad \varphi^I(x+h) = \frac{d\varphi(x+h)}{d(x+h)}, \dots$$

$$\varphi^{II}(x) = \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}, \quad \varphi^{II}(x+h) = \frac{d^2\varphi(x+h)}{[d(x+h)]^2}, \dots$$

Nach dem Taylor'schen Lehrsatz ist:

$$f(x+h) = f(x) + \varphi(x)h + \varphi^I(x) \frac{h^2}{1.2} + \varphi^{II}(x) \frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

$$f(x+2h) = f(x+h) + \varphi(x+h)h + \varphi^I(x+h) \frac{h^2}{1.2} + \varphi^{II}(x+h) \frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

$$f(x+3h) = f(x+2h) + \varphi(x+2h)h + \varphi^I(x+2h) \frac{h^2}{1.2} + \varphi^{II}(x+2h) \frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f(x+nh) = f(x+(n-1)h) + \varphi[x+(n-1)h]h + \varphi^I[x+(n-1)h] \frac{h^2}{1.2} + \dots$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man:

$$f(x+nh) - f(x) = h \Sigma \varphi(x+\alpha h) + \frac{h^2}{1.2} \Sigma \varphi^I(x+\alpha h) + \frac{h^3}{1.2.3} \Sigma \varphi^{II}(x+\alpha h) + \dots$$

Setzt man $x=a$, $x+nh=b$, so wird

$$1) \quad f(b) - f(a) = h \Sigma \varphi(a+\alpha h) + \frac{h^2}{1.2} \Sigma \varphi^I(a+\alpha h) + \frac{h^3}{1.2.3} \Sigma \varphi^{II}(a+\alpha h) + \dots$$

Durch ein ähnliches Verfahren wird man zu folgenden Gleichungen geleitet:

$$2) \quad \varphi(b) - \varphi(a) = h \Sigma \varphi^I(a+\alpha h) + \frac{h^2}{1.2} \Sigma \varphi^{II}(a+\alpha h) + \frac{h^3}{1.2.3} \Sigma \varphi^{III}(a+\alpha h) + \dots$$

$$3) \quad \varphi^I(b) - \varphi^I(a) = h \Sigma \varphi^{II}(a+\alpha h) + \frac{h^2}{1.2} \Sigma \varphi^{III}(a+\alpha h) + \frac{h^3}{1.2.3} \Sigma \varphi^{IV}(a+\alpha h) + \dots$$

$$4) \quad \varphi^{II}(b) - \varphi^{II}(a) = h \Sigma \varphi^{III}(a+\alpha h) + \frac{h^2}{1.2} \Sigma \varphi^{IV}(a+\alpha h) + \frac{h^3}{1.2.3} \Sigma \varphi^V(a+\alpha h) + \dots$$

.....

Die Summenzeichen Σ beziehen sich auf alle Werthe von $\alpha=0$ bis $\alpha=n-1$.

Führt man in der Gleichung ⁽¹⁾ successiv die Werthe von $\Sigma \varphi^I(a+\alpha h)$, $\Sigma \varphi^{II}(a+\alpha h)$, $\Sigma \varphi^{III}(a+\alpha h)$, ... ein, die sich aus den Gleichungen (2), (3), (4), ... ergeben, so findet man:

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= h \Sigma \varphi(a+\alpha h) + \frac{h}{2} [\varphi(b) - \varphi(a)] \\ &\quad - \frac{h^2}{12} [\varphi^I(b) - \varphi^I(a)] \\ &\quad + \frac{h^3}{720} [\varphi^{III}(b) - \varphi^{III}(a)] \\ &\quad - \frac{h^5}{30240} [\varphi^V(b) - \varphi^V(a)] \\ &\quad + \frac{h^7}{1209600} [\varphi^{VII}(b) - \varphi^{VII}(a)] \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

Man das $f(b) - f(a) = \int_a^b \varphi(x) dx$, und $\Sigma \varphi(a+\alpha h)$
 $\varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \dots + \varphi[a+(n-1)h]$ ist, so hat

$$\begin{aligned}
 162) \int_a^b \varphi(x) dx = & h \left[\frac{1}{2} \varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \dots + \frac{1}{2} \varphi(b) \right] \\
 & - \frac{h^2}{12} [\varphi'(b) - \varphi'(a)] \\
 & + \frac{h^4}{720} [\varphi'''(b) - \varphi'''(a)] \\
 & - \frac{h^6}{30240} [\varphi^{(5)}(b) - \varphi^{(5)}(a)] \\
 & + \frac{h^8}{1209600} [\varphi^{(7)}(b) - \varphi^{(7)}(a)] \\
 & \dots
 \end{aligned}$$

Vernachlässiget man in dieser Gleichung die Glieder, die mit h^2 oder mit höheren Potenzen von h vervielfacht sind, so erhält man :

$$\int_a^b \varphi(x) dx = h \left[\frac{1}{2} \varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \dots + \frac{1}{2} \varphi(b) \right]$$

Hiermit ist ein erster Näherungswerth des bestimmten Integrals $\int_a^b \varphi(x) dx$ gegeben. Will man mit dieser Genauigkeit sich nicht begnügen, so ist auch das Glied

$$- \frac{h^2}{12} [\varphi'(b) - \varphi'(a)]$$

hinzuzufügen, u. s. w.

118) Der Gebrauch, der im vorhergehenden § aufgestellten Formel, hat an sich keine Schwierigkeit, doch mag es nützlich sein einige Beispiele hier anzuführen.

Es soll der Werth von $\int_1^{\alpha} \frac{dx}{x}$ näherungsweise bestimmt werden.

Es ist $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b = \alpha$, und $1 + nh = \alpha$. Man erhält daher nach No. 162 :

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\alpha} \frac{dx}{x} = & h \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1+h} + \frac{1}{1+2h} + \dots + \frac{1}{1+(n-1)h} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} \right) \\
 & - \frac{h^2}{12} \left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1} \right) \\
 & + \frac{h^4}{720} \left(-\frac{6}{\alpha^4} + \frac{6}{1} \right) \\
 & - \dots
 \end{aligned}$$

Da aber bekannt ist, dass $\int_1^{\alpha} \frac{dx}{x} = \lg. \alpha$, so kann durch die vorstehende Gleichung der Werth des Logarithmus einer beliebigen Zahl näherungsweise bestimmt werden, wenn nur für α eben jene Zahl gesetzt wird.

Gesetzt es sei $\alpha=5$, $h=\frac{1}{2}$, daher $n=8$. Man erhält hiernach:

$$\lg. 5 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{2}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \right)$$

$$- \frac{1}{12 \cdot 4} \left(-\frac{1}{25} + 1 \right)$$

$$+ \frac{1}{720 \cdot 16} \left(-\frac{1}{5^4} + 6 \right)$$

$$= 1,6094881 \dots$$

Es wurden die Glieder, welche höhere Potenzen als h^4 besitzen, weggelassen. Hierdurch ist in dem vorliegenden Falle eine Ungenauigkeit entstanden, welche indess erst in der fünften Decimalstelle bemerkbar ist.

Zu einem zweiten Beispiele diene das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Hier ist:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}, \varphi^I(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \varphi^{II}(x) = \frac{8x^2}{(1+x^2)^3}, \varphi^{III}(x) = -\frac{48x^3}{(1+x^2)^4},$$

$$\varphi^{IV}(x) = \frac{384x^4}{(1+x^2)^5}, \varphi^V(x) = \frac{3840x^5}{(1+x^2)^6}, \dots$$

Ferner ist $a=0$, $b=1$, und $0+nh=1$. Es wird daher:

$$\frac{\pi}{4} = h \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1+h^2} + \frac{1}{1+4h^2} + \frac{1}{1+9h^2} + \dots + \frac{1}{1+(n-1)^2h^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$+ \frac{h^2}{12} + \frac{2}{(1+1)^2} - \frac{h^4}{720} \cdot \frac{48}{(1+1)^4} + \dots$$

Setzt man $h=\frac{1}{4}$, daher $n=4$, so erhält man, wenn man nur die Glieder mit h und h^2 berücksichtigt und die Glieder mit höheren Potenzen von h vernachlässiget,

$$\frac{\pi}{4} = 0,7853982, \text{ daher } \pi = 3,1415928.$$

Hier sind die ersten sechs Decimalen genau richtig.

Es enthalten die beiden angeführten Beispiele eine Anwendung der Näherungsmethode zur Berechnung der Logarithmen und des Kreisumfanges. Es soll noch an einem dritten Beispiele

eine Anwendung zur näherungsweise Bestimmung eines auf anderem Wege nicht angebbaren Integrales gezeigt werden.

Es soll der numerische Werth des bestimmten Integrales

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{x}} dx$$

näherungsweise angegeben werden.

Hier ist $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, daher:

$$\varphi^I(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2},$$

$$\varphi^{II}(x) = (1-2x) \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4},$$

$$\varphi^{III}(x) = (1-6x+6x^2) \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^6},$$

$$\varphi^{IV}(x) = (1-12x+36x^2-24x^3) \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^8},$$

$$\varphi^V(x) = (1-20x+120x^2-240x^3+120x^4) \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{10}},$$

.....

Ferner ist $a=0$, $b=1$, daher $0+nh=1$, folglich $h=\frac{1}{n}$. Führt man diese Werthe in No. 162 ein, so erhält man:

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{x}} dx = \frac{1}{n} \left(e^{-\frac{n}{1}} + e^{-\frac{n}{2}} + e^{-\frac{n}{3}} + \dots + e^{-\frac{n}{n-1}} + \frac{1}{2} e^{-1} \right)$$

$$- \frac{1}{12n^2} (e^{-1} - 0),$$

$$+ \frac{1}{720n^4} (e^{-1} - 0),$$

$$- \frac{1}{30240n^6} (e^{-1} - 0),$$

$$+ \dots$$

Setzt man hierin $x=3$ und berechnet man auch nur die angeführten Glieder, so erhält man eine Annäherung die bis zur 7. Decimale genau richtig ist.

Zu einem letzten Beispiele diene die näherungsweise Bestimmung des Integrales

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$$

Hier ist $\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{x}$, daher:

$$\varphi^I(x) = -(1+x) \frac{e^{-x}}{x^2},$$

$$\varphi^{II}(x) = (2+2x+x^2) \frac{e^{-x}}{x^3},$$

$$\varphi^{III}(x) = -(6+6x+3x^2+x^3) \frac{e^{-x}}{x^4},$$

$$\varphi^{IV}(x) = (24+24x+12x^2+4x^3+x^4) \frac{e^{-x}}{x^5},$$

$$\varphi^V(x) = -(120+120x+60x^2+20x^3+5x^4+x^5) \frac{e^{-x}}{x^6},$$

.....

ferner ist $a=1$, $b=\infty$, daher $1+nh=\infty$, folglich wird n unendlich, wenn für h eine endliche Grösse gesetzt wird.

Man erhält unter Berücksichtigung dieser Werthe aus **No. 162** folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{e^{-x} dx}{x} &= h \left(\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{e^{-(1+h)}}{1+h} + \frac{e^{-(1+2h)}}{1+2h} + \frac{e^{-(1+3h)}}{1+3h} + \dots + \frac{e^{-[1+(n-1)h]}}{1+(n-1)h} + \frac{1}{2} 0 \right) \\ &\quad - \frac{h^2}{12} (0 + 2e^{-1}) + \frac{h^4}{720} (0 + 16e^{-1}) - \frac{h^6}{30240} (0 + 326e^{-1}) + \dots \\ &= \frac{h}{e} \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-h}}{1+h} + \frac{e^{-2h}}{1+2h} + \frac{e^{-3h}}{1+3h} + \text{in inf.} \right) \\ &\quad - \frac{h^2}{12e} 2 + \frac{h^4}{720e} 16 - \frac{h^6}{30240e} 326 + \dots \end{aligned}$$

Setzt man $h=\frac{1}{3}$ und berechnet man die 10 ersten Glieder der ersten Horizontalreihe und die zwei ersten Glieder der folgenden Reihe, so findet man:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{x} = 0,418241,$$

welcher Werth nur in den beiden ersten Decimalen genau richtig ist. Würde man statt 10 Glieder die 20 ersten in Rechnung gezogen, und würde man von der zweiten Horizontalreihe noch das Glied mit h^6 berechnet haben, so würde die Annäherung an den wahren Werth grösser ausgefallen sein, und in dem vorliegenden Falle mindestens bis zur 8. Decimalstelle einen genau richtigen Werth liefern,

Dritter Abschnitt.

Integration der Differentialgleichungen.

119) Integration durch Absonderung der Veränderlichen. Eine Differentialgleichung von der Form $dy=f(x)dx$, in welcher also die Veränderlichen x, y gesondert auftreten, kann nach den bisher entwickelten Lehren integrirt werden, und zwar entweder vollständig oder nur annähernd, je nach der Beschaffenheit von $f(x)dx$.

Hat man daher eine Differentialgleichung von der Form $f(x,y)dx=F(x,y)dy$, so wird auch von dieser das Integral bestimmt werden können, wenn man dieselbe so in zwei Theile zerlegen kann, dass in jedem nur eine Veränderliche mit ihrem Differentiale vorkommt, oder wenn man im Stande ist sie auf die Form $\varphi(x)dx=\psi(y)dy$ zu bringen.

Wenn $f(x,y)$ und $F(x,y)$ in der Art sich in Factoren zerlegen lassen, dass jeder derselben nur eine der Veränderlichen enthält, so ist die eben erwähnte Sonderung der Veränderlichen leicht auszuführen. Denn hat man:

$$f(x,y) = \varphi(x) \cdot \psi(y), \quad F(x,y) = \varphi_1(x) \cdot \psi_1(y),$$

so geht die Differentialgleichung $f(x,y)dx=F(x,y)dy$, in folgende über:

$$\varphi(x) \cdot \psi(y)dx = \varphi_1(x) \cdot \psi_1(y)dy.$$

Man erhält hieraus:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} dx = \frac{\psi(y)}{\psi_1(y)} dy,$$

welche Gleichung integrabel ist.

1tes Beispiel.

Man soll die Gleichung: $xy dx + 4y \sqrt{x} + x^2 \sqrt{y} dy = 0$ integriren.

Aus der vorgelegten Gleichung folgt, dass

$$y(x + 4\sqrt{x})dx = -x^2 \sqrt{y} dy$$

ist. Dividirt man durch $x^2 y$, so erhält man:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{\sqrt{x^3}}\right)dx = -\frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

Es ist daher:

$$\lg x - \frac{8}{\sqrt{x}} = -2\sqrt{y} + C$$

das gesuchte Integral.

2tes Beispiel.

Man soll die Gleichung: $(x\sqrt{y} - a\sqrt{y} - a\sqrt{b} + x\sqrt{b}) dx = (yx^2 - bx^2 + a^2b - ya^2) dy$ integrieren.

Da

$$x\sqrt{y} - a\sqrt{y} - a\sqrt{b} + x\sqrt{b} = (x-a)(\sqrt{y} + \sqrt{b}),$$

und

$$yx^2 - bx^2 + a^2b - ya^2 = (y-b)(x^2 - a^2)$$

ist, so geht die vorgelegte Gleichung in folgende über:

$$(x-a)(\sqrt{y} + \sqrt{b}) dx = (y-b)(x^2 - a^2) dy.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dx}{x+a} = dy(\sqrt{y} - \sqrt{b}).$$

Man erhält hieraus durch Integration:

$$\lg(x+a) = \frac{2}{3}\sqrt{y}^3 - y\sqrt{b} + C.$$

120) Absonderung der Veränderlichen in homogenen Differentialgleichungen. In jeder homogenen Differentialgleichung, d. h. in jeder, in welcher die Anzahl der Dimensionen der Veränderlichen in allen Gliedern dieselbe ist, kann die Sonderung der Veränderlichen, daher auch die Integration ausgeführt werden. Denn setzt man in der Differentialgleichung $f(x,y)dx = F(x,y)dy$, unter der Voraussetzung ihrer Homogenität, $y=xz$, so wird x in jedem Gliede der Gleichung mit einem gleichen Exponenten und daher als gemeinschaftlicher Factor auftreten. Hierdurch wird $\frac{f(x,y)}{F(x,y)}$ eine Function von z , so dass man setzen kann:

$$\frac{f(x,y)}{F(x,y)} = \varphi(z).$$

Die vorgelegte Gleichung geht hiernach in folgende über:

$$\varphi(z)dx = dy.$$

Da $y=xz$, so ist $dy = xdz + zdx$. Es wird hierdurch

$$\varphi(z)dx = xdz + zdx.$$

In dieser Gleichung ist die Sonderung der Veränderlichen leicht auszuführen, man erhält nämlich:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\varphi(z) - z}.$$

Es ist daher:

$$163) \lg. x = \int \frac{dz}{\varphi(z) - z}.$$

Setzt man, nachdem die Integration ausgeführt ist, $z = \frac{y}{x}$, so erhält man die gesuchte Relation zwischen x und y .

1tes Beispiel.

Man soll das Integral der homogenen Differentialgleichung $(x^2 + xy + y^2)dx = x^2dy$ finden.

Setzt man $y = xz$, daher $dy = xdz + zdx$, so erhält man:

$$(x^2 + x^2z + x^2z^2)dx = x^2(xdz + zdx).$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Es ist daher:

$$\lg. x = \text{Arc. (tang. } = z) + C,$$

folglich ist:

$$\lg. x = \text{Arc. (tang. } = \frac{y}{x}) + C$$

die gesuchte Relation zwischen x und y .

2tes Beispiel.

Man soll das Integral der homogenen Differentialgleichung $(x^3 + y^3)dx + (xy dx - x^2 dy) \sqrt{x^2 - y^2} - xy^2 dy = 0$ finden.

Setzt man $y = xz$, daher $dy = xdz + zdx$, so findet man nach einigen Reductionen:

$$\frac{dx}{x} = z^2 dz + \sqrt{1 - z^2} dz.$$

Man erhält hieraus durch Integration:

$$\lg. x = \frac{z^3}{3} + \int \sqrt{1 - z^2} dz.$$

Es ist aber:

$$\int \sqrt{1 - z^2} dz = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} - \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1 - z^2}},$$

und durch theilweises Integriren erhält man:

$$\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1-z^2}} = -z\sqrt{1-z^2} + \int \sqrt{1-z^2} dz,$$

es wird hierdurch

$$\int \sqrt{1-z^2} dz = \text{Arc}(\sin = z) + z\sqrt{1-z^2} - \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

folglich:

$$\int \sqrt{1-z^2} dz = \frac{1}{2} \text{Arc}(\sin = z) + \frac{z}{2} \sqrt{1-z^2}.$$

Hiernach wird:

$$\lg x = \frac{z^3}{3} + \frac{1}{2} \text{Arc}(\sin = z) + \frac{z}{2} \sqrt{1-z^2} + C.$$

Setzt man hierin $z = \frac{y}{x}$, so erhält man die gesuchte Gleichung, nämlich:

$$\lg x = \frac{y^3}{x^3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \text{Arc}\left(\sin = \frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + C.$$

121) Absonderung der Veränderlichen in einem speciellen Falle. Bisher wurden zwei Fälle bestimmt, in welchen eine Absonderung der Veränderlichen möglich war. Es gibt deren noch mehrere, von welchen indess hier nur noch einer entwickelt werden soll, theils weil derselbe häufiger vorkömmt, theils weil er viele specielle Fälle umfasst.

In der Differentialgleichung

$$dy + yPdx = Qdx$$

seien P und Q irgend welche Functionen von x.

Setzt man $y = Xz$, daher $dy = Xdz + zdX$, so erhält man:

$$Xdz + zdX + zXPdx = Qdx,$$

daher:

$$z(dX + XPdx) + Xdz - Qdx = 0.$$

X bezeichnet hier irgend eine Function von x, über welche noch nach Willkühr verfügt werden kann. Wählt man dieselbe so, dass

$$dX + XPdx = 0$$

wird, so muss z nothwendig einen solchen Werth erhalten, dass auch

$$Xdz - Qdx = 0$$

wird, indem nur in diesem Falle der vorgelegten Gleichung Genüge geschieht.

Aus der Gleichung $dX + XPdx = 0$ folgt:

$$\lg. X = -\int Pdx,$$

es ist daher:

$$X = e^{-\int Pdx}.$$

Führt man diesen Werth in der Gleichung $Xdz - Qdx = 0$ ein, so erhält man:

$$e^{-\int Pdx} dz - Qdx = 0.$$

Sondert man in dieser Gleichung die Veränderlichen und integrirt man darauf, so findet man:

$$z = \int e^{\int Pdx} Qdx.$$

Da $y = Xz$ ist, so hat man

$$164) \quad y = e^{-\int Pdx} \left(\int e^{\int Pdx} Qdx + C \right).$$

Ganz auf ähnliche Weise kann auch die Integration der Gleichung:

$$y^{m-1}dy + y^m Pdx = Qdx$$

bewerkstelliget werden. Denn setzt man $y^m = z$, daher $y^{m-1}dy = \frac{dz}{m}$, so erhält man:

$$\frac{dz}{m} + z Pdx = Qdx,$$

welche Gleichung mit der eben integrierten in der Form übereinstimmt.

122) Kennzeichen der Integrabilität einer Differentialgleichung, und Integration solcher Gleichungen. Wenn es möglich wäre die Sonderung der Veränderlichen in jeder beliebig vorgelegten Differentialgleichung auszuführen, so wären keine besondere Untersuchungen über die Integrationen der Gleichungen erforderlich, denn sie wären auf die in den früheren Abschnitten dargelegten Integrationen zurückgeführt. Es würde sich daher in diesem Abschnitte nur um Entwicklung der Sonderungs-Methoden der Veränderlichen handeln. Nun sind aber solche Absonderungen, ausser in den angeführten Fällen, nur in wenigen andern, und überdiess nur durch besondere Kunstgriffe möglich. Um so wichtiger ist es andere Methoden der Integration aufzusuchen.

Auch hier giebt die Differentialrechnung die besten Anhaltspunkte. Das Differential der Gleichung $f(x,y)=0$ ist:

$$\frac{df(x,y)}{dx} + \frac{df(x,y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Setzt man: $\frac{df(x,y)}{dx} = P$, $\frac{df(x,y)}{dy} = Q$, so ist das Differential von $f(x,y)=0$

$$Pdx + Qdy = 0.$$

In dieser Gleichung ist nach §. 19. No. 45

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

Dies giebt ein Kennzeichen ab, ob eine vorgelegte Differentialgleichung unmittelbar durch Differentiation einer Gleichung entstanden ist oder nicht. Man bringt nämlich die Differentialgleichung in die Form $Pdx + Qdy = 0$, und sieht zu, ob $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ ist.

Wäre z. B. die Gleichung $(2ax - by)dx + (2cy - bx)dy = 0$ gegeben, so hat man $P = 2ax - by$, $Q = 2cy - bx$, daher $\frac{dP}{dy} = -b$, und $\frac{dQ}{dx} = -b$, folglich $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. Es ist daher die vorgelegte Differentialgleichung vollständig das Differential einer Gleichung.

In einem anderen Falle sei $(ayx^3 - 2x^4)dx + (ax^4 - 2yx^3)dy = 0$ die gegebene Differentialgleichung. Hier ist $P = ayx^3 - 2x^4$, $Q = ax^4 - 2yx^3$, daher $\frac{dP}{dy} = ax^3$, $\frac{dQ}{dx} = 4ax^3 - 6yx^2$. Es ist daher $\frac{dP}{dy}$ nicht gleich $\frac{dQ}{dx}$, folglich ist auch die vorgelegte Differentialgleichung nicht unmittelbar das Ergebniss der Differentiation einer Gleichung. Multiplicirt man aber die Differentialgleichung mit $\frac{1}{x^3}$, so erhält man $(ay - 2x)dx + (ax - 2y)dy = 0$. Hier ist $P = ay - 2x$, $Q = ax - 2y$, daher $\frac{dP}{dy} = a$, und $\frac{dQ}{dx} = a$, folglich ist $(ay - 2x)dx + (ax - 2y)dy = 0$ als das wirkliche Differential einer Gleichung zu betrachten.

Eine Differentialgleichung, welche der Bedingung $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ Genüge leistet, wird eine integrable genannt, weil das Integral

derselben, wie sogleich gezeigt werden soll, immer angegeben werden kann.

Die Gleichung $Pdx + Qdy = 0$ erfülle die Bedingung der Integrabilität, und z sei eine solche Function von x, y , dass $dZ = Pdx + Qdy = 0$ ist. Hiernach ist $P = \frac{dz}{dx}$ und $Q = \frac{dz}{dy}$. Integriert man, indem man nur x als veränderlich, dagegen y als constant betrachtet, so erhält man:

$$z = \int Pdx + Y,$$

wo Y eine Constante bezeichnet, die auch y enthält. Es kömmt nur darauf an den Werth von Y zu bestimmen, denn der von $\int Pdx$ kann nach den früheren Regeln bestimmt werden, indem P hier nur als eine Function von x betrachtet wird. Nun ist nach der Voraussetzung $\frac{dz}{dy} = Q$, ferner ist:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy} \int Pdx + \frac{dY}{dy},$$

es ist daher:

$$Q = \frac{d}{dy} \int Pdx + \frac{dY}{dy}.$$

Hieraus folgt:

$$dY = Qdy - \left(\frac{d}{dy} \int Pdx \right) dy,$$

oder da $\frac{d}{dy} \int Pdx = \int \frac{dP}{dy} dx$, so hat man auch

$$dY = Qdy - \left(\int \frac{dP}{dy} dx \right) dy,$$

folglich:

$$Y = \int \left(Q - \int \frac{dP}{dy} dx \right) dy.$$

Man erhält hierdurch:

$$165) z = \int Pdx + \int \left(Q - \int \frac{dP}{dy} dx \right) dy = C,$$

welches die gesuchte Gleichung ist, durch deren Differentiation die Differentialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ erhalten wird.

Der Ausdruck $Q - \int \frac{dP}{dy} dx$ ist nur eine Function von y und nicht von x , denn differentirt man in Hinsicht x , so erhält man:

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\int \frac{dP}{dy} dx \right) = \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}.$$

Es ist aber nach der Voraussetzung $\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy}$, folglich ist das Differential von $Q - \int \frac{dP}{dy} dx$ in Hinsicht x gleich Null.

Wenn man in der Gleichung $dz = Pdx + Qdy = 0$ zuerst in Hinsicht y integrirt, und x als constant betrachtet, so erhält man:

$$z = \int Qdy + X,$$

wo X eine Function von x ist, und auf ganz ähnliche Weise, wie früher Y bestimmt wird. Man findet hiernach:

$$166) \quad z = \int Qdy + \int \left(P - \int \frac{dQ}{dx} dy \right) dx = C.$$

1tes Beispiel.

Man soll das Integral von $(3ax^2 - by)dx + (3cy^2 + 2y - bx)dy = 0$ bestimmen:

Es ist $P = 3ax^2 - by$, $Q = 3cy^2 + 2y - bx$, daher

$$\frac{dP}{dy} = -b, \quad \frac{dQ}{dx} = -b,$$

folglich ist die Gleichung integrabel.

Nach *No. 165* erhält man, wenn man die Werthe von P und Q einführt,

$$\int (3ax^2 - by)dx + \int (3cy^2 + 2y - bx - \int (-b)dx) dy = C,$$

daher:

$$ax^3 - bxy + cy^3 + y^2 = C,$$

welche Gleichung das gesuchte Integral ist.

2tes Beispiel.

Man soll das Integral der Differentialgleichung $(y \cos x + 2xy^2)dx + (\sin x - a \sin y + 2x^2y)dy = 0$ bestimmen.

Es ist:

$$P = y \cos x + 2xy^2, \quad Q = \sin x - a \sin y + 2x^2y,$$

daher $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, folglich ist die Differentialgleichung an sich integrabel.

Führt man die Werthe von P , Q und $\frac{dP}{dy}$ in *No. 165* ein, so findet man, wenn die dort angezeigten Integrationen ausgeführt werden,

$$\sin x + x^2 y^2 + a \cos y = C,$$

welche Gleichung das gesuchte Integral ist.

123) Factoren, durch welche nicht integrable Gleichungen integrabel werden. Auf eine an sich nicht integrable Differentialgleichung findet die eben entwickelte Methode begreiflich keine Anwendung. Man kann aber beweisen, dass es für eine jede solche Gleichung einen Factor giebt, durch welchen dieselbe integrabel wird, d. h. wenn

$$Mdx + Ndy = 0$$

eine nicht integrable Differentialgleichung ist, so giebt es immer einen variablen im Allgemeinen von x und y abhängigen Factor L , der so beschaffen ist, dass

$$LMdx + LNdy = 0$$

der Bedingung der Integrabilität Genüge leistet.

Denn gesetzt $Z=0$ sei das Integral von $Mdx+Ndy=0$, und

$$Pdx + Qdy = 0$$

sei das exacte Differential der Gleichung $Z=0$, so muss, da die Gleichungen $Mdx+Ndy=0$ und $Pdx+Qdy=0$ aus derselben Gleichung $Z=0$ durch Differentiation hervorgegangen sind und daher einen gleichen Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ besitzen,

$$\frac{P}{Q} = \frac{M}{N}$$

sein, was, wenn nicht $M=P$ und $N=Q$ ist, wie dies wirklich nach der Voraussetzung nicht der Fall sein soll, nur dadurch eintreten kann, dass $LM=P$ und $LN=Q$ ist, so dass man hat:

$$\frac{P}{Q} = \frac{LM}{LN}.$$

Da nun $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, so muss auch sein $\left(\frac{d.LM}{dy}\right) = \left(\frac{d.LN}{dx}\right)$. Der Factor L muss also so bestimmt werden, dass er eben dieser Gleichung genügt. Ist es aber gelungen ihn dieser Gleichung gemäss herzustellen, so ist an sich klar, dass durch denselben die Gleichung

$$Mdx + Ndy = 0$$

integrabel werde, und daher nach der Methode des vorhergehenden § integrirt werden könne.

Zur Bestimmung des Factors L dient die Gleichung:

$$\left(\frac{d \cdot LM}{dy}\right) = \left(\frac{d \cdot LN}{dx}\right),$$

welche Gleichung, da L, M, N Functionen von x und y sind, sich in folgende Theile auflösen lässt:

$$167) \left(\frac{dL}{dy}\right) M + \left(\frac{dM}{dy}\right) L = \left(\frac{dL}{dx}\right) N + \left(\frac{dN}{dx}\right) L.$$

Die weitere Behandlung dieser Gleichung, welche durch Integration zur Bestimmung des Werthes von L führen soll, ist meist mit grösseren Schwierigkeiten verbunden, als die Integration der vorgelegten Differentialgleichung selbst. Es ist daher für die praktische Anwendung durch die Kenntniss des Vorhandenseins jener Factoren L nur wenig gewonnen.

124) In speciellen Fällen, in welchen etwa über die Beschaffenheit von L schon durch andere Betrachtungen etwas ausgesagt werden kann, oder in welchen M und N eine besondere Beschaffenheit besitzen u. s. w., kann der Werth von L leichter ermittelt werden.

Gesetzt etwa L sei nur eine Function von x . Es wird hiernach $\left(\frac{dL}{dy}\right) = 0$, und die Gleichung No. 167 geht in folgende über:

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) L = \frac{dL}{dx} N + \left(\frac{dN}{dx}\right) L,$$

es folgt hieraus:

$$\frac{dL}{L} = \frac{1}{N} \left[\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right) \right] dx,$$

es ist daher:

$$\lg L = \int \frac{1}{N} \left[\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right) \right] dx,$$

folglich:

$$168) L = e^{\int \frac{1}{N} \left[\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right) \right] dx}.$$

Einen Fall dieser Art bietet die schon früher integrierte Gleichung $dy + yPdx = Qdx$ dar, in welcher P und Q irgend welche Functionen von x sind.

Da nämlich Qdx , mit einer beliebigen Function von x multiplicirt, immer integrabel bleibt, so kommt es nur darauf an zu

untersuchen, ob eine solche Function von x existirt, welche als integrirender Factor für $dy + yPdx$ zu betrachten wäre. In diesem Ausdrücke ist

$$M = yP, N = 1, \left(\frac{dM}{dy}\right) = P, \left(\frac{dN}{dx}\right) = 0,$$

man erhält daher nach No. 168 für den integrirenden Factor:

$$L = e^{\int Pdx}.$$

Die Gleichung:

$$e^{\int Pdx} dy + e^{\int Pdx} yPdx = e^{\int Pdx} Qdx$$

ist daher integrabel, und ihre Integration kann nach §. 122 bewirkt werden. Man erhält hierdurch dasselbe Resultat, welches auf anderem Wege in §. 121 gewonnen wurde.

125) Auch für homogene Differentialgleichungen lässt sich der integrirende Factor leicht bestimmen. Hier wird also über die Beschaffenheit von M und N eine specielle Voraussetzung gemacht, nämlich die, dass die Dimensionen der Veränderlichen in allen Gliedern von M und N von gleicher Zahl sind.

Die Ableitung des integrirenden Factors stützt sich auf eine allgemeine Eigenschaft der homogenen Gleichungen, die hier zunächst erörtert werden soll.

Es sei $Z=0$ eine homogene Gleichung von x, y , in welcher n die Zahl der Dimensionen der Veränderlichen in jedem Gliede ausdrückt. Setzt man $y=xt$, so erhält man:

$$Z = x^n f(t),$$

daher durch Differentiation:

$$\alpha) dZ = nx^{n-1} f(t) dx + x^n \frac{df(t)}{dt} dt.$$

Allgemein ist aber:

$$dZ = Pdx + Qdy,$$

wo P und Q die partiellen Differentialquotienten in Hinsicht x und y bezeichnen.

Da $y=xt$, so ist $dy=tdx + xdt$, daher:

$$dZ = (P + Qt)dx + Qxdt.$$

Hält man diese Gleichung mit der Gleichung (α) zusammen, so erkennt man, dass

$$P + Qt = nx^{n-1} f(t),$$

daher :

$Px + Qtx = nx^n f(t)$
 ist. Es ist aber $tx = y$, und $x^n f(t) = Z$, folglich
 169) $Px + Qy = nZ$.

In dieser Eigenschaft der homogenen Gleichungen ist ein sehr einfaches Mittel der Integration homogener Differentialgleichungen enthalten. Denn das Integral von

$$Pdx + Qdy = 0$$

ist, wenn $n-1$ die Zahl der Dimensionen der Veränderlichen in P und Q bezeichnet,

$$Z = \frac{1}{n}(Px + Qy) = 0.$$

Man sieht, dass diese Methode voraussetzt, dass $Pdx + Qdy = 0$ integrabel, dass also $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ sei, und dass sie ferner in dem einen Falle nicht anwendbar ist, in welchem n Null wird.

Nach dieser Vorbereitung soll der Factor bestimmt werden, durch welchen die homogene aber nicht integrable Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ integrabel wird.

Es sei L der Factor, durch welchen sie integrabel wird, und $Z = 0$ sei das Integral von $LMdx + LNdy = 0$, so dass man hat :

$$\beta) \quad dZ = LMdx + LNdy.$$

Jedenfalls ist auch L eine homogene Function von x und y . Gesetzt nun es sei $n-1$ die Zahl der Dimensionen der Veränderlichen in LM und LN , so hat man nach *No. 169*:

$$\gamma) \quad nZ = LMx + LNy.$$

Durch Division der Gleichungen (β) und (γ) erhält man:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{dZ}{Z} = \frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny}.$$

Da $\frac{1}{n} \cdot \frac{dZ}{Z}$ ein exactes Differential ist, so ist dies auch für das andere Glied der Gleichung der Fall, es ist daher der Factor, durch welchen $Mdx + Ndy = 0$ integrabel wird,

$$\frac{1}{Mx + Ny}.$$

126) Wenn ein Factor gefunden ist, durch welchen eine Differentialgleichung integrabel wird, so können sogleich unzählig viele andere Factoren angegeben werden, welche die gleiche Eigenschaft besitzen. Denn gesetzt es sei L der Factor, durch welchen $Mdx + Ndy = 0$ integrabel wird, und $Z=0$ sei das Integral dieser Gleichung, so ist

$$dZ = LMdx + LNdy.$$

Multipliziert man mit $\varphi(Z)$, so erhält man:

$$\varphi(Z)dZ = \varphi(Z)LMdx + \varphi(Z)LNdy.$$

Da $\varphi(Z)dZ$ ein exactes Integral ist, so ist es auch der andere Theil der Gleichung, und $\varphi(Z)L$ ist daher ebenfalls ein integrierender Factor. Die Function $\varphi(Z)$ kann willkürlich gewählt und abgeändert werden, und gibt daher, durch eben diese Abänderungen, ebenso viele verschiedene integrierende Factoren.

127) Integration der Differentialgleichungen, in welchen der Quotient $\frac{dy}{dx}$ in der zweiten oder höheren Potenzen enthalten ist. Es kann endlich der Fall eintreten, dass in einer Differentialgleichung der Quotient $\frac{dy}{dx}$ in der zweiten oder einer höheren Potenz enthalten ist, wie etwa in den Gleichungen $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0$, u. s. w. Bestimmt man die Wurzeln solcher Gleichungen, indem man $\frac{dy}{dx}$ als die Unbekannte betrachtet, so erhält man Gleichungen, in welchen der Quotient $\frac{dy}{dx}$ nur in der ersten Potenz erscheint und welche sofort nach den früheren Regeln integrirt werden können. Das Produkt dieser Integrale ist das Integral der vorgelegten Gleichung.

Es sei z. B. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0$ die Differentialgleichung, deren Integral bestimmt werden soll.

Die Wurzeln dieser Gleichung sind $\frac{dy}{dx} = \pm a$. Die Factoren der Gleichung sind daher $\frac{dy}{dx} - a$ und $\frac{dy}{dx} + a$, und es ist

$\left(\frac{dy}{dx} - a\right)\left(\frac{dy}{dx} + a\right) = 0$. Das Integral von $\frac{dy}{dx} - a = 0$ ist aber:

$y - ax - A = 0$, und das von $\frac{dy}{dx} + a = 0$ ist: $y + ax - B = 0$,

wo A und B die Constanten bezeichnen. Das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung ist daher:

$$(y - ax - A)(y + ax - B) = 0,$$

folglich:

$$\alpha) \quad y^2 - y(A + B) - a^2x^2 - ax(A - B) + AB = 0.$$

Es treten hier scheinbar zwei neue constante Grössen auf, die man indess einander gleich setzen kann, ohne der Allgemeinheit des Integrals Eintrag zu thun. Setzt man also $A = B$, so erhält man:

$$\beta) \quad y^2 - 2yA - a^2x^2 + A^2 = 0.$$

Die Gleichungen (α) und (β) müssen zu derselben Differentialgleichung führen. In der That erhält man aus (α) durch Differentiation:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2ax + A - B)a}{2y - (A + B)}.$$

Zugleich folgt aus (α) , dass

$$2y - (A + B) = \pm (2ax + A - B),$$

folglich ist:

$$\frac{dy}{dx} = \pm a.$$

Den gleichen Werth erhält man aus der Gleichung (β) .

In dem vorliegenden Beispiele war die Integration der einzelnen Factoren der Gleichung leicht ausführbar. Dies ist immer der Fall, wenn die Sonderung der Veränderlichen möglich ist, oder wenn überhaupt die Form des Factors mit der Form einer der früher integrierten Gleichungen übereinstimmt. Wenn dies nicht eintritt, so kann durch ein sogleich näher zu erörterndes Verfahren nicht selten das Integral bestimmt werden.

Die zu integrierende Gleichung sei:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + ax - by = 0.$$

Die Factoren dieser Gleichung sind:

$$\frac{dy}{dx} - \sqrt{by - ax} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} + \sqrt{by - ax},$$

es handelt sich sonach um die Integration der Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx} - \sqrt{by - ax} = 0, \quad \frac{dy}{dx} \sqrt{by - ax} = 0.$$

Die Sonderung der Veränderlichen ist hier unmittelbar nicht möglich, dagegen ist der Quotient $\frac{dy}{dx}$ schon gesondert in der Differentialgleichung enthalten. Es ist nämlich, wenn man $\frac{dy}{dx} = p$ setzt,

$$p^2 = by - ax.$$

Das Differential dieser Gleichung ist:

$$2p \, dp = b \, dy - a \, dx,$$

folglich ist:

$$2p \, dp = (bp - a) \, dx.$$

Hieraus erhält man:

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{2p \, dp}{bp - a} \\ &= \frac{2p}{b} \times \frac{2a}{b^2} \lg \left(p - \frac{a}{b} \right) + C. \end{aligned}$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung und aus der gegebenen Gleichung die Grösse p , so findet man für das gesuchte Integral

$$x = \frac{2}{b} \sqrt{by - ax} + \frac{2a}{b^2} \lg \left(\sqrt{by - ax} - \frac{a}{b} \right) + C.$$

128) Ein ähnliches Verfahren, wie das zuletzt befolgte, führt auch nicht selten in jenen Fällen zum Ziele, in welchen die algebraische Auflösung der Gleichung in Factoren nicht möglich ist. Um sogleich die Bedingungen zu erkennen, unter welchen dieses Verfahren mit Erfolg anzuwenden ist, soll die Untersuchung allgemeiner geführt werden.

Es sei:

$$U = f(x, y, p) = 0$$

die zu integrirende Gleichung, p bezeichne in derselben den Quotienten $\frac{dy}{dx}$.

Das Differential dieser Gleichung ist:

$$\frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{dp} dp = 0,$$

folglich ist:

$$a) \quad dx \left(\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy} p \right) + \frac{dU}{dp} dp = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist im Allgemeinen eine Function von x , y und p . Gelingt es dasselbe herzustellen, so hat man nur aus der auf diesem Wege sich ergebenden Gleichung, und aus der vorgelegten Gleichung $f(x, y, p) = 0$, die Grösse p zu eliminiren, um das Integral der Gleichung $f(x, y, p) = 0$ zu erhalten.

Das Integral der Gleichung (α) kann in der That immer angegeben werden, wenn die vorgelegte Differentialgleichung die Form

$$y + Px + Q = 0$$

hat, wo P und Q irgend welche Functionen von p bezeichnen. Es ist in diesem speciellen Falle $U = y + Px + Q$, daher:

$$\frac{dU}{dx} = P, \quad \frac{dU}{dy} = 1, \quad \frac{dU}{dp} = \left(x \frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dp} \right).$$

Durch diese Werthe geht die Gleichung (α) in folgende über:

$$dx (P + p) + \left(x \frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dp} \right) dp = 0,$$

welche auch in folgender Weise geordnet werden kann:

$$dx + x \cdot \frac{1}{P + p} \cdot \frac{dP}{dp} \cdot dp = - \frac{1}{P + p} \cdot \frac{dQ}{dp} \cdot dp.$$

Das Integral dieser Gleichung ist nach §. 121:

$$x = -e^{-\int \frac{1}{P+p} \cdot \frac{dP}{dp} dp} \left(e^{\int \frac{1}{P+p} \cdot \frac{dP}{dp} dp} \frac{1}{P+p} \cdot \frac{dQ}{dp} dp + C \right).$$

Durch Elimination von p aus dieser Gleichung und aus der vorgelegten wird das gesuchte Integral der Gleichung $y + Px + Q = 0$ erhalten.

129) Singuläre Integrale. Das vollständige Integral einer Differentialgleichung enthält, wie überhaupt jedes vollständige Integral, eine unbestimmte Constante, welche in der Differentialgleichung nicht enthalten ist. Legt man dieser Constanten verschiedene Werthe bei, so erhält man ebenso viele partikuläre Integrale. Der Differentialquotient, der aus dem vollständigen Integral sich ergiebt, und der des partikulären Integrals werden daher immer identische Werthe besitzen. Man darf hieraus noch nicht schliessen, dass jede Gleichung, deren Differentialquotient mit dem aus einer gegebenen Differential-

gleichung abgeleiteten Differentialquotienten gleichen Werth besitzt, auch nothwendig entweder ein vollständiges oder partikuläres Integral der Differentialgleichung sein müsse. Denn es kann der Fall sein, dass ganz verschiedene Gleichungen, die nicht durch Abänderung des Werthes einer ihrer Constanten in einander übergehen, zu gleichen Differentialgleichungen oder gleichen Werthen der Differentialquotienten führen.

In der That erhält man aus der Gleichung :

$$x^2 + 2ax - y^2 - a^2 - b = 0$$

durch Differentiation :

$$x + a - y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen a , so findet man:

$$2x^2 - 4xy \frac{dy}{dx} + y^2 + y^2 \frac{dy^2}{dx^2} + b = 0,$$

und hieraus folgt:

$$\alpha) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} + \frac{1}{y} \sqrt{2x^2 - y^2 - b}.$$

Dieser Differentialquotient stimmt genau mit dem aus der Gleichung

$$2x^2 - y^2 - b = 0$$

sich ergebenden überein. Man erhält nämlich für denselben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y},$$

und ebenso erhält man aus (α) , unter Berücksichtigung dass $2x^2 - y^2 - b = 0$ ist,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}.$$

Man erkennt hieraus, dass die beiden Gleichungen:

$$(1) \quad x^2 + 2ax - y^2 - a^2 - b = 0,$$

$$(2) \quad 2x^2 - y^2 - b = 0,$$

der Differentialgleichung (α) Genüge leisten, und doch ist die zweite Gleichung kein partikulares Integrale, denn es gibt keinen besonderen Werth der Constanten a , durch welchen die zweite Gleichung aus der ersten hervorgehen würde.

Man nennt die Gleichung (2) ein singuläres Integral der Gleichung (α) , während (1) das vollständige Integral von (α)

ist. Euler hat auf diese Eigenthümlichkeit der Differentialgleichungen aufmerksam gemacht, und im ersten Theil seiner Integralrechnung § 557 u. f. ein Kennzeichen aufgestellt, nach welchem sich beurtheilen lässt, ob ein Integral, welches einer Differentialgleichung Genüge leistet, ein singuläres Integral ist oder nicht. Lagrange hat denselben Gegenstand aufgefasst, und zuerst den Zusammenhang der vollständigen und der singulären Integrale, so wie überhaupt eine sehr umfassende Theorie der singulären Integrale in seinen *Leçons sur le calcul des Fonctions* (Leçon XIV, VX, XVI.) dargelegt. Die wichtigsten Punkte dieser Theorie sollen sogleich näher erörtert werden.

130) Es lassen sich verschiedene Methoden der Herstellung der singulären Integrale unterscheiden. Es werden hier zunächst jene entwickelt, welche das vollständige Integral als bekannt voraussetzen, um dann jene folgen zu lassen, nach welchen für eine gegebene Differentialgleichung ohne Kenntniss des vollständigen Integrals das singuläre bestimmt werden kann.

1te Methode.

Es sei:

$$(1) \quad F(x, y, a) = 0$$

eine gegebene Gleichung. Der Kürze halber werde dieselbe durch F bezeichnet.

Das Differential dieser Gleichung ist:

$$(2) \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Eliminirt man aus (1) und (2) die Constante a , so erhält man eine Gleichung zwischen x , y , und $\frac{dy}{dx}$, welche durch

$$(3) \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

bezeichnet werden soll.

Betrachtet man a nicht als eine Constante, sondern als eine Function von x und y , so wird das Differential von (1)

$$(4) \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dF}{da} \cdot \frac{da}{dx} = 0.$$

Man kann über die Art wie a von x und y abhängen soll nach Willkühr verfügen, daher auch a so bestimmen, dass

$$(5) \quad \frac{dF}{da} \cdot \frac{da}{dx} = 0$$

wird. Ist dies aber der Fall, so erhält man offenbar durch Verbindung der Gleichungen (1), (4), (5) dieselbe Differentialgleichung, wie jene, welche durch Verbindung der Gleichungen (1) und (2) erhalten wurde.

Der Gleichung (5) geschieht in zwei Fällen Genüge, nämlich wenn

$$\frac{da}{dx} = 0,$$

und zweitens wenn

$$(6) \quad \frac{dF}{dx} = 0$$

wird. Aus dem ersten Falle folgt a gleich einer Constanten, wie schon in (1) angenommen wurde. Aus dem zweiten Falle oder aus (6) folgt aber, dass a gleich irgend einer Function von x und y werde, so dass man erhält:

$$a = \varphi(x, y).$$

Führt man diesen Werth in (1) ein, so erhält man:

$$(7) \quad F[x, y, \varphi(x, y)] = 0.$$

Das Differential dieser Gleichung wird der Gleichung (3) ebenso gut Genüge leisten, wie das Differential von (1), und doch kann (7) kein partikulares Integral von (1) sein, indem es keine constante Grösse gibt, die für a in (1) eingeführt die Gleichung (7) erzeugen würde.

Es geht hieraus hervor, dass wenn das vollständige Integral

$$F(x, y, a) = 0$$

einer Differentialgleichung $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ bekannt ist, auch immer das singuläre Integral, wenn ein solches existirt, gefunden werden könne. Man hat nämlich a nur aus der Gleichung $\frac{dF}{da} = 0$ zu bestimmen, und in $F(x, y, a) = 0$ einzuführen. Nur in dem Falle würde man kein singuläres Integral erhalten, wenn die Gleichung $\frac{dF}{da} = 0$ für a einen constanten Werth, oder einen

solchen von x und y abhängigen Werth liefert, der durch $F(x, y, a) = 0$ constant wird, indem hieraus nur ein partikulärer Fall von $F(x, y, a) = 0$ hervorgeht.

Zur Anwendung des Bisherigen diene folgendes Beispiel.
Das vollständige Integral der Differentialgleichung:

$$(a) \quad y dy - 2x dx = \sqrt{2x^2 - y^2 - b} \cdot dx$$

ist

$$x^2 + 2ax - y^2 - a^2 - b = 0.$$

Das Differential dieser Gleichung in Hinsicht a , gleich Null gesetzt, gibt

$$x - a = 0,$$

daher $a = x$. Führt man diesen Werth ein, so erhält man:

$$2x^2 - y^2 - b = 0,$$

welche Gleichung, wie schon oben gefunden wurde, das singuläre Integral von (a) ist.

2te Methode.

Es sei wieder:

$$(8) \quad F(x, y, a) = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$(9) \quad a = \psi(x, y).$$

Führt man diesen Werth von a , der aber der Kürze halber nur durch ψ bezeichnet werden soll, in (8) ein, so erhält man:

$$(10) \quad F(x, y, \psi) = 0,$$

welche Gleichung nach der Art ihrer Entstehung eine identische ist. Es werden daher auch die aus (10) sich ergebenden partiellen Differentialquotienten sich in all ihren Gliedern aufheben, oder es wird jeder der partiellen Differentialquotienten für sich Null werden. Folglich ist:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dx} = 0,$$

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dy} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{d\psi}{dx} = - \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{d\psi}}, \quad \frac{d\psi}{dy} = - \frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{d\psi}}.$$

Nun wurde aber erst gezeigt, dass $F(x, y, a) = 0$ in ein singuläres Integrale übergehe, wenn a so bestimmt wird, dass der Gleichung $\frac{dF}{da} = 0$ Genüge geschieht. Eben der Werth von a , durch welchen $\frac{dF}{da}$ Null wird, muss auch, für ψ gesetzt, $\frac{dF}{d\psi}$ in Null überführen. Und umgekehrt, bestimmt man ψ aus der Gleichung $\frac{dF}{d\psi} = 0$, so wird eben dieser Werth, statt a gesetzt, auch $\frac{dF}{da}$ zum Verschwinden bringen. Wenn aber $\frac{dF}{d\psi}$ Null wird, so wird

$$(11) \quad \frac{d\psi}{dx} = -\frac{1}{0}, \quad \frac{d\psi}{dy} = -\frac{1}{0}.$$

Man kann daher ein singuläres Integral auch dadurch erhalten, dass man die Nenner der beiden partiellen Differentialquotienten, oder den gemeinschaftlichen Factor dieser Nenner gleich Null setzt. Es ist hiermit nur ausgesagt, dass man auf diesem Wege ein singuläres Integral erhalten könne, nicht dass man es erhalten müsse, denn es kann sein, dass durch die Gleichung, die man erhält, $\psi(x, y)$ gleich einer constanten Grösse werde. In diesem Falle hätte man nur ein partikuläres und nicht ein singuläres Integral erhalten.

Diese zweite Methode ist besonders da in Anwendung zu bringen, wo das vollständige Integral unter der Form $a = \psi(x, y)$ erscheint. Denn in eben diesem Falle würde die erste Methode zu keinem Resultate führen.

Beispiel.

Das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$ydy - 2xdx = dx \sqrt{2x^2 - y^2 - b}$$

ist:

$$a = x + \sqrt{2x^2 - y^2 - b}.$$

In diesem Falle hat man daher $\psi = x + \sqrt{2x^2 - y^2 - b}$; folglich ist:

$$\frac{d\psi}{dx} = 1 + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - y^2 - b}},$$

$$\frac{d\psi}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{2x^2 - y^2 - b}}.$$

Der gemeinschaftliche Factor der Nenner dieser beiden Quotienten ist: $\sqrt{2x^2 - y^2 - b}$. Das singuläre Integral ist daher:

$$2x^2 - y^2 - b = 0,$$

wie schon oben auf einem anderen Wege gefunden wurde.

3te Methode.

Eine dritte Methode lässt sich auf eine Eigenschaft des integrierenden Factors gründen. Es wird derselbe durch jene Gleichung, welche das singuläre Integral ausdrückt, stets unendlich.

Gesetzt nämlich es sei:

$$Pdx + Qdy = 0$$

eine gegebene Differentialgleichung, die durch den Factor L integrabel wird, so dass

$$L(Pdx + Qdy) = 0$$

ein exactes Differential einer Gleichung ist, die etwa durch $F(x, y) = a$ ausgedrückt werden soll. Es liegt in der Natur eines singulären Integrals, dass für den Fall der singulären Lösung a nicht eine constante Grösse ist, und dass daher das Differential des singulären Integrales nicht, wie das des vollständigen Integrales $F(x, y) = a$, Null werden kann. Man hat daher für den Fall des singulären Integrals

$$L(Pdx + Qdy) = dF(x, y),$$

wo $dF(x, y)$ nicht Null sein kann.

Es folgt aus dieser Gleichung:

$$L = \frac{dF(x, y)}{Pdx + Qdy}.$$

Es muss aber das Differential des singulären Integrals, ebenso wie das des vollständigen der Gleichung $Pdx + Qdy = 0$ genügen, oder aus beiden Integralen muss $Pdx + Qdy = 0$ hervorgehen. Hierdurch wird aber

$$L = \infty = \frac{1}{0}.$$

Wenn daher ein integrierender Factor gefunden ist, so hat man nur nachzusehen, ob der Nenner einen Factor, der eine Relation zwischen x und y ausdrückt, enthält, und denselben gleich Null zu setzen. Die Gleichung, die man so erhält kann ein singuläres Integral sein.

Beispiel. Die Differentialgleichung:

$$ydy - 2xdx = dx \sqrt{2x^2 - y^2 - b}$$

wird integrabel durch den Factor

$$\frac{1}{\sqrt{2x^2 - y^2 - b}}.$$

Dieser Factor wird unendlich, wenn

$$2x^2 - y^2 - b = 0$$

ist. Es ist daher eben diese Gleichung ein singuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung.

131) Singuläre Integrale der zweiten und höherer Ordnungen. Wenn ein singuläres Integral einer Differentialgleichung des ersten Grades als ein singuläres Integral der ersten Ordnung bezeichnet wird, so ist analog ein singuläres Integral einer Differentialgleichung des zweiten Grades ein singuläres Integral der zweiten Ordnung zu nennen. Die Ableitung solcher Integrale schliesst sich ganz an das Vorhergehende an.

Gesetzt es sei:

$$(1) \quad F(x, y, a, b) = 0$$

die gegebene Gleichung. Das Differential derselben ist eine Function von $x, y, \frac{dy}{dx}, a, b$, und soll bezeichnet werden durch

$$(2) \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a, b\right) = 0.$$

Da nach (1) die Constante b eine Function von x, y, a ist, so erhält man, wenn man diesen Werth von b in (2) einführt, eine Function von $x, y, \frac{dy}{dx}, a$, welche durch

$$(3) \quad \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right) = 0$$

bezeichnet werden soll.

Eliminirt man hingegen aus (1) und (2) die Constante a , so erhält man eine Function von $x, y, \frac{dy}{dx}, b$. Sie soll bezeichnet werden durch

$$(4) \quad \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, b\right) = 0.$$

Die Gleichungen (3) und (4) sind, eine jede für sich, als das vollständige Integral ein und derselben Differentialgleichung des zweiten Grades zu betrachten. Es lassen sich aus denselben sogleich zwei singuläre Integrale der zweiten Ordnung herstellen. Denn eliminirt man aus (3) und aus der Gleichung

$$(5) \quad \frac{d\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right)}{da} = 0$$

die Constante a , so erhält man eine singuläre Lösung der Differentialgleichung des zweiten Grades. Ebenso erhält man durch Elimination von b aus (4) und aus

$$(6) \quad \frac{d\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, b\right)}{db} = 0$$

ein singuläres Integral der Differentialgleichung des zweiten Grades.

Es lässt sich beweisen, dass die beiden singulären Integrale, die man so erhält, identisch sind. Da es nämlich gleichgültig ist in welcher Ordnung das Eliminiren von a und b vorgenommen wird, so kann man auch zuerst (1) und (2) in Hinsicht a differentiren, die Differentialquotienten, die man so erhält, gleich Null setzen, und darauf aus diesen Gleichungen und aus den Gleichungen (1) und (2) die Constanten a und b eliminiren. Das Differential von (1) in Hinsicht a gleich Null gesetzt führt zu der Gleichung

$$(7) \quad \frac{dF}{da} + \frac{dF}{db} \cdot \frac{db}{da} = 0,$$

wo der Kürze halber $F(x, y, a, b)$ durch F bezeichnet ist.

Das Differential von (2) in Hinsicht a genommen, führt zu der Gleichung

$$(8) \quad \frac{df}{da} + \frac{df}{db} \cdot \frac{db}{da} = 0.$$

Eliminirt man aus (7) und (8) $\frac{db}{da}$, so erhält man:

$$(9) \quad \frac{dF}{da} \cdot \frac{df}{db} - \frac{dF}{db} \cdot \frac{df}{da} = 0.$$

Eliminirt man endlich aus (1), (2) und (9) a und b , so erhält man dasselbe singuläre Integral, welches aus der Elimination von a aus (3) und (5) hervorgeht.

Setzt man zweitens die partiellen Differentialquotienten von (1) und (2) in Hinsicht b gleich Null, so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{db} + \frac{dF}{da} \cdot \frac{da}{db} &= 0, \\ \frac{df}{db} + \frac{df}{da} \cdot \frac{da}{db} &= 0.\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$(10) \quad \frac{dF}{da} \cdot \frac{df}{db} - \frac{dF}{db} \cdot \frac{df}{da},$$

welche Gleichung mit (9) identisch ist. Eliminirt man daher aus (1), (2) und (10) a und b , so wird man dasselbe singuläre Integral wie früher erhalten. Zugleich ist dies dasselbe Integral, welches aus der Elimination von b aus (4) und (6) hervorgeht. Es wird also aus der Verbindung von (3) und (5), wie aus der von (4) und (6) nur einerlei singuläres Integral erhalten.

132) Es ist noch übrig Methoden zu bestimmen, nach welchen das singuläre Integral einer Differentialgleichung ohne Kenntniss des vollständigen Integrals und ohne Kenntniss des integrierenden Factors sich herstellen lässt.

1te Methode.

Es sei

$$(1) \quad F(x, y, a) = 0.$$

Das Differential dieser Gleichung ist:

$$(2) \quad \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy = 0,$$

wo F , wie schon früher, statt $F(x, y, a)$ gesetzt ist.

Die Gleichung (2) drückt offenbar irgend eine Relation der Grössen $x, y, \frac{dy}{dx}, a$ aus.

Es folgt hieraus:

$$a = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Führt man diesen Werth, der der Kürze halber nur durch φ bezeichnet werden soll, in (1) ein, so erhält man:

$$(3) \quad F(x, y, \varphi) = 0.$$

Eliminirt man unmittelbar aus (1) und (2) die Constante a , so erhält man als Differential von (1)

$$(4) \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Die Gleichungen (3) und (4), von denen jede das Differential von (1) ausdrückt, sind entweder unmittelbar identisch oder sie werden es durch einen Factor M , der nur eine Function von $x, y, \frac{dy}{dx}$ sein kann, d. h. es ist

$$(5) \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = M F(x, y, \varphi).$$

Es ist an sich klar, dass, wenn aus den Gleichungen

$$F(x, y, \varphi) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dF}{d\varphi} = 0$$

φ eliminirt wird, man zu derselben Gleichung gelangen müsse, wie wenn man aus

$$F(x, y, a) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dF}{da} = 0$$

a eliminirt. In dem letzteren Falle erhält man aber, wie früher gezeigt wurde, das singuläre Integral der Differentialgleichung (3) oder, was dasselbe ist, der Gleichung (4). Also wird man auch in dem ersten Falle das singuläre Integral von (3) und (4) erhalten.

Da der Quotient $\frac{dy}{dx}$ nur in φ enthalten ist, so ist es gleichgültig, ob man aus den Gleichungen:

$$F(x, y, \varphi) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dF}{d\varphi} = 0$$

φ oder $\frac{dy}{dx}$ eliminirt.

Wäre die Differentialformel, deren singuläres Integral gesucht wird, in der Form $F(x, y, \varphi) = 0$ gegeben, d. h. in der Form in der auch das vollständige Integral erscheint, wo nur statt φ die Constante a stehen würde, so wäre es leicht das singuläre Integral anzugeben. Man hätte nur den partiellen Differentialquotienten $\frac{dF}{d\varphi}$ gleich Null zu setzen, und aus dieser

Gleichung und der gegebenen Differentialgleichung den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ zu eliminiren.

In der verlangten Form ist die Differentialgleichung nicht, oder doch nur selten gegeben. Dagegen ist bekannt, dass immer die Gleichung (5) Statt finden muss. Differentirt man (5) in Hinsicht $\frac{dy}{dx}$, welche Grösse zur Abkürzung durch p bezeichnet werden soll, so erhält man:

$$\frac{df(x, y, p)}{dp} = M \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp} + \frac{dM}{dp} \cdot F.$$

Es ist aber $F(x, y, \varphi)$ oder F , wie zur Abkürzung geschrieben wurde, gleich $\frac{f(x, y, p)}{M}$, folglich:

$$(6) \quad \frac{df(x, y, p)}{dp} = M \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp} + \frac{dM}{dp} \cdot \frac{f(x, y, p)}{M}.$$

Da nun nach (4) $f(x, y, p) = 0$ ist, so wird für den Fall, dass $\frac{dF}{d\varphi} = 0$ wird, auch

$$(7) \quad \frac{df(x, y, p)}{dp} = 0.$$

Diese Folgerung zieht sogleich eine andere nach sich. Es ist nämlich das vollständige Differential von (4)

$$df(x, y, p) = \frac{df(x, y, p)}{dx} dx + \frac{df(x, y, p)}{dy} dy + \frac{df(x, y, p)}{dp} dp = 0.$$

Wird daher $\frac{df(x, y, p)}{dp}$ gleich Null, so muss zugleich auch

$$(8) \quad \frac{df(x, y, p)}{dx} + \frac{df(x, y, p)}{dy} \cdot p = 0$$

sein.

Man sieht, dass die Bestimmung von φ in der Art, dass $\frac{dF}{d\varphi} = 0$ wird, die Gleichungen (7) und (8) zur Folge hat. Früher wurde nun gezeigt, dass die singuläre Gleichung durch Elimination von $\frac{dy}{dx}$ aus $F(x, y, \varphi) = 0$ und $\frac{dF}{d\varphi} = 0$ erhalten werde. Es wird daher ebenso die Elimination von p aus den Gleichungen (4) und (7) oder aus den Gleichungen (4) und (8) das singuläre Integral darbieten, wenn überhaupt ein solches existirt. Es ist wohl kaum zu bemerken nöthig, dass das Resultat des

Eliminirens von p aus (4) und (7), mit dem der Elimination von p aus (4) und (8) übereinstimmen muss, wenn man wirklich ein singuläres Integral erhält.

Die Regel, welche hieraus zur Bestimmung eines singulären Integrals hervorgeht, ist folgende. Wenn

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \text{ oder } f(x, y, p) = 0$$

die gegebene Differentialgleichung ist, so nehme man das Differential derselben und setze

$$\frac{df(x, y, p)}{dx} + \frac{df(x, y, p)}{dy} \cdot p = 0,$$

und

$$\frac{df(x, y, p)}{dp} = 0.$$

Erhält man durch Elimination von p aus jeder dieser Gleichungen und der gegebenen Gleichung, einerlei Gleichung, so ist diese das gesuchte singuläre Integral. Erhält man verschiedene Resultate, so hat die Gleichung kein singuläres Integral.

Es kann dieselbe Regel noch auf eine andere kürzere Weise ausgedrückt werden. Da nämlich $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ ist, und da ferner

$$\frac{df(x, y, p)}{dx} + \frac{df(x, y, p)}{dy} \cdot p + \frac{df(x, y, p)}{dp} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

so ist:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{\frac{df(x, y, p)}{dx} + \frac{df(x, y, p)}{dy} \cdot p}{\frac{df(x, y, p)}{dp}}.$$

Es wird aber für den Fall eines singulären Integrales der Zähler und Nenner dieses Bruches Null, so dass man hat

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0}{0}.$$

Man hat daher zur Bestimmung des singulären Integrals nur aus der gegebenen Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2}$ abzuleiten, und Zähler und Nenner des Bruches, den man erhält, gleich Null zu setzen. Führen die beiden Gleichungen, die hieraus hervorgehen, und die gegebene Gleichung, durch Elimination von p zu einerlei Resultat, so ist dies das gesuchte singuläre Integral.

Beispiel.
Es ist die Differentialgleichung

$$ydy - 2x dx = dx \sqrt{2x^2 - y^2 - b}$$

gegeben.

Es folgt aus derselben unmittelbar

$$(\alpha) \quad y \frac{dy}{dx} - 2x = \sqrt{2x^2 - y^2 - b}.$$

Erhebt man ins Quadrat, um das Wurzelzeichen zu entfernen, so findet man:

$$2x^2 - 4xy \frac{dy}{dx} + y^2 + y^2 \frac{dy^2}{dx^2} + b = 0.$$

Differentirt man in Hinsicht x , so erhält man:

$$4x - 4y \frac{dy}{dx} - 4x \frac{dy^2}{dx^2} - 4xy \frac{d^2y}{dx^2} + 2y \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy^3}{dx^3} + 2y^2 \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4x + 2y \frac{dy}{dx} + 4x \frac{dy^2}{dx^2} - 2y \frac{dy^3}{dx^3}}{2y^2 \frac{dy}{dx} - 4xy}.$$

Setzt man Zähler und Nenner gleich Null, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\frac{dy^3}{dx^3} - \frac{dy^2}{dx^2} \cdot \frac{2x}{y} - \frac{dy}{dx} + \frac{2x}{y} = 0,$$

$$(\beta) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{2x}{y} = 0.$$

Die Factoren der ersten dieser Gleichungen sind $\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{y}$, $\frac{dy}{dx} - 1$, $\frac{dy}{dx} + 1$, es ist daher:

$$(\gamma) \quad \left(\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{y} \right) \left(\frac{dy}{dx} - 1 \right) \left(\frac{dy}{dx} + 1 \right) = 0.$$

Es folgt nun aus (β) wie aus (γ) , dass

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}.$$

Führt man diesen Werth in (α) ein, so erhält man:

$$2x^2 - y^2 - b = 0,$$

welches also die gesuchte singuläre Gleichung ist.

Die Werthe $\frac{dy}{dx} = 1$ und $\frac{dy}{dx} = -1$, welche ebenfalls der Gleichung (γ) Genüge leisten, geben in Verbindung mit α keine

singuläre Lösungen, weil sie zu anderen Gleichungen führen, als die ist, welche durch Verbindung von (α) und (β) erhalten wird.

2te Methode.

Es sei

$$(1) \quad F(x, y, a) = 0$$

ein vollständiges Integral.

Entwickelt man aus dem Differential desselben die Constante a , so erhält man im Allgemeinen

$$(2) \quad a = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

und führt man diesen Werth in (1) ein, so hat man wie früher

$$(3) \quad F(x, y, \varphi) = 0,$$

in welcher Differentialgleichung die willkürliche Constante nicht mehr enthalten ist.

Wenn aus (1) und aus dem Differential von (1) unmittelbar a eliminirt wird, so sei

$$(4) \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

die Gleichung, die man erhält, und die, wie schon früher erwähnt wurde, mit (3) übereinstimmen muss. Es kann diese Gleichung immer auf die Form

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} + \psi(x, y) = 0$$

zurückgebracht werden. Führt man den Werth von $\frac{dy}{dx}$, der sich hieraus ergibt in φ ein, so wird die Gleichung (3) identisch. Die partiellen Differentialquotienten derselben in Hinsicht x und y , werden sich daher in allen ihren Gliedern gegenseitig aufheben, oder es wird jeder dieser Quotienten für sich gleich Null sein. Man erhält hiernach

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = 0$$

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Es ist aber φ gleich $\varphi[x, y, -\psi(x, y)]$, daher:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\varphi}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dx},$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\varphi}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dy}.$$

Hierdurch gehen die obigen Gleichungen in folgende über:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dx} = 0,$$

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dy} - \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dy} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(6) \quad \frac{d\psi}{dx} = \frac{\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}}{\frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\psi}},$$

$$(7) \quad \frac{d\psi}{dy} = \frac{\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dy}}{\frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\psi}}.$$

Für den Fall eines singulären Integrals muss φ so bestimmt werden, dass $\frac{dF}{d\varphi}$ Null wird, und umgekehrt kann, wenn $\frac{dF}{d\varphi} = 0$ ist, das Integral ein singuläres sein. Die Gleichungen (6) und (7) gehen aber durch die Annahme $\frac{dF}{d\varphi} = 0$ in folgende über:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{0}, \quad \frac{d\psi}{dy} = \frac{1}{0}.$$

Es kann daher das singuläre Integral einer Differentialgleichung auch dadurch bestimmt werden, dass man dieselbe zuerst in die Form der Gleichung (5) bringt, und darauf die partiellen Differentialquotienten $\frac{d\psi}{dx}$, $\frac{d\psi}{dy}$ bestimmt. Setzt man den Nenner eines jeden derselben gleich Null, und erhält man hierdurch ein und dieselbe Gleichung zwischen x und y , so wird dieselbe das singuläre Integral sein.

Beispiel.

Die Differentialgleichung:

$$ydy - 2xdx = dx \sqrt{2x^2 - y^2 - b}$$

führt zu folgendem Werth des Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} + \frac{1}{y} \sqrt{2x^2 - y^2 - b}.$$

Es ist daher in diesem speciellen Falle:

$$\psi = - \left(\frac{2x}{y} + \frac{1}{y} \sqrt{2x^2 - y^2 - b} \right),$$

Es folgt hieraus:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{2\sqrt{2x^2 - y^2 - b} + 2x}{y\sqrt{2x^2 - y^2 - b}},$$

$$\frac{d\psi}{dy} = \frac{(2x+1)\sqrt{2x^2 - y^2 - b} - y^2}{y^2\sqrt{2x^2 - y^2 - b}}.$$

Setzt man die Nenner dieser beiden Brüche gleich Null, so erhält man in beiden Fällen

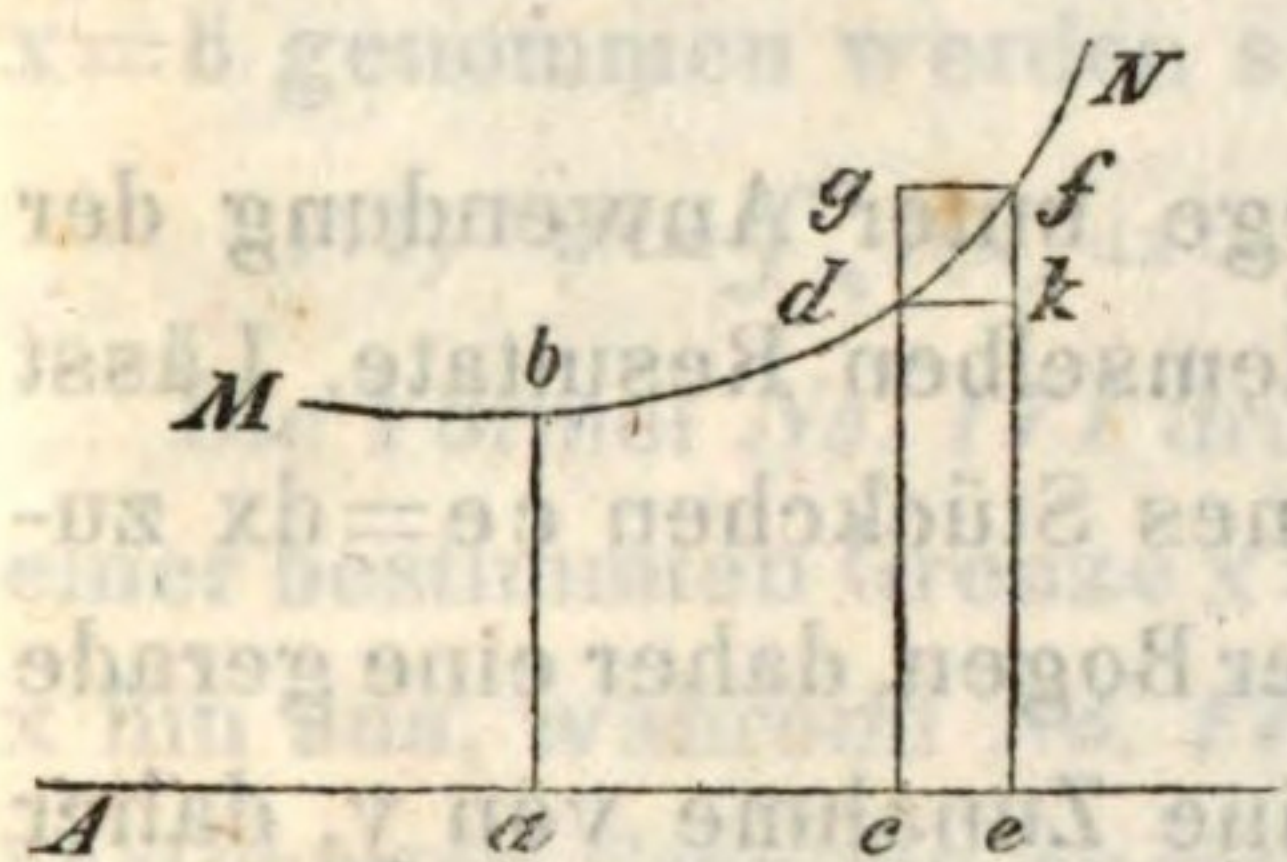
$$2x^2 - y^2 - b = 0,$$

welches daher das singuläre Integral der gegebenen Differentialgleichung ist.

Vierter Abschnitt.

Anwendung der Integralrechnung auf Geometrie.

133) Quadratur der ebenen Curven. Es sei $y=f(x)$ die Gleichung einer Curve MN. Der Flächeninhalt der Curve ist der von der Abscissenachse, von der Curve und von zwei, der Lage nach bekannten, Ordinaten eingeschlossene Raum.



Wenn ab die Lage der einen der Ordinaten ist, die der Abscisse $Aa=a$ entspricht, und wenn $Ac=x$ die Abscisse der zweiten Ordinate cd bestimmt, so kann der Flächeninhalt $abcd$ nur eine Function von x sein, deren Beschaffenheit von der Natur der Gleichung $y=f(x)$ abhängt.

Gesetzt es sei $F(x)$ diese Function, so dass also $F(x)$ den Flächeninhalt von $abcd$ ausdrückt. Nimmt x um $ce = \Delta x$ zu, so nimmt der Flächeninhalt um $cdef$ zu, und es ist

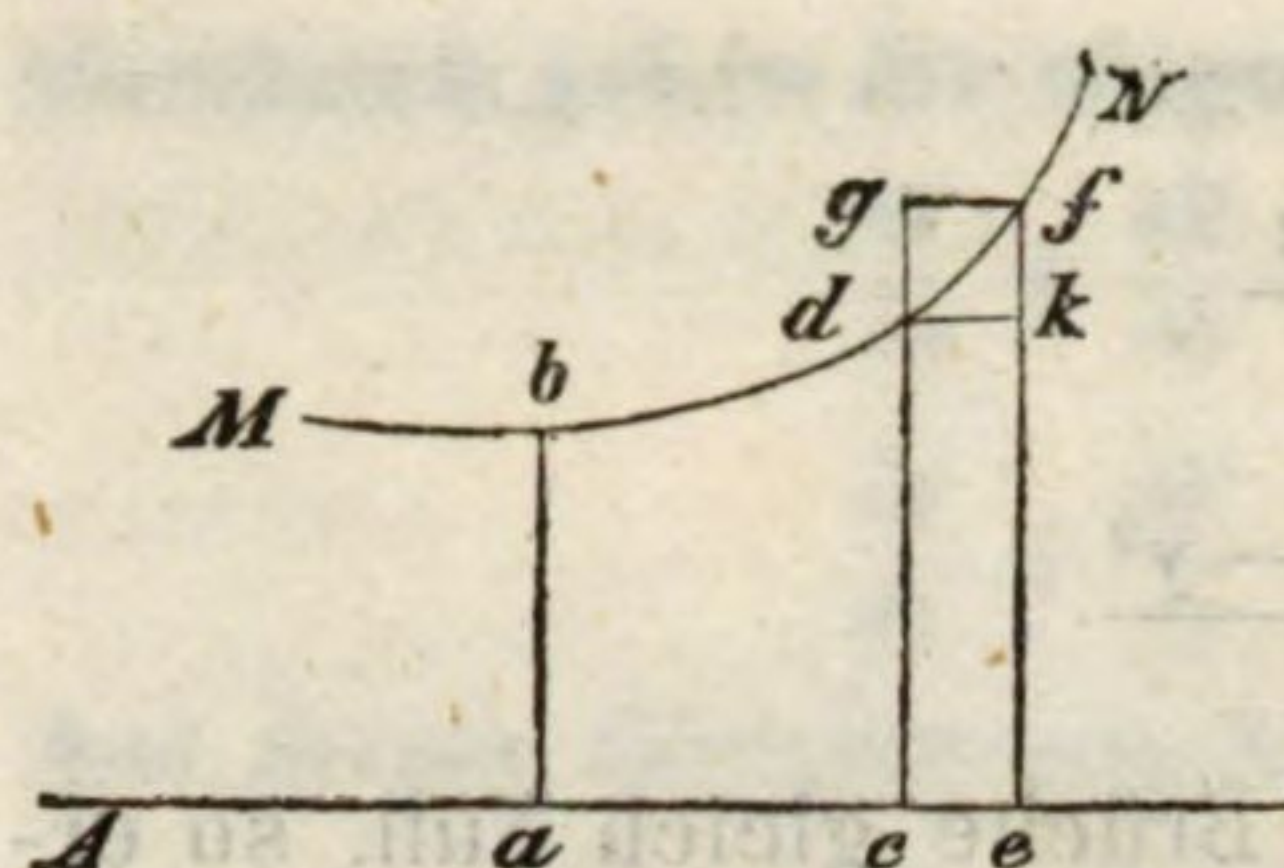
$$cdef = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x).$$

Der Flächeninhalt des Rectangels $cgef$ ist:

$$cgef = ce \cdot ef = \Delta x \cdot f(x + \Delta x),$$

und der des Rectangels $cdke$ ist:

$$cdke = ce \cdot cd = \Delta x \cdot f(x).$$



Es ist daher:

$$\frac{cgef}{cdke} = \frac{\Delta x \cdot f(x + \Delta x)}{\Delta x \cdot f(x)}.$$

Für den Fall, dass ce oder Δx verschwindend klein wird, werden Zähler und Nenner gleich, und man

erhält $\frac{cgef}{cdke} = 1$. Da nun $cdef$ kleiner als $cgef$ und grösser als $cdke$ ist, so wird auch

$$\frac{cdef}{cdke} = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x \cdot f(x)},$$

für den Fall, dass Δx verschwindend klein wird, gleich der Einheit werden. In diesem Falle geht aber Δ in d über. Man hat daher:

$$\frac{dF(x)}{dx \cdot f(x)} = 1.$$

Hieraus folgt:

$$(170) \quad F(x) = \int f(x) dx.$$

Da $y = f(x)$, so hat man auch

$$F(x) = \int y dx.$$

Man gelangt auf kürzerem Wege unter Anwendung der Methode des unendlich Kleinen zu demselben Resultate. Lässt man nämlich x um ein unendlich kleines Stückchen $ce = dx$ zunehmen, so ist df ein unendlich kleiner Bogen, daher eine gerade Linie, und fk ist die unendlich kleine Zunahme von y , daher gleich dy . Der Flächeninhalt des Trapezes $cdef$ ist die unendlich kleine Zunahme von $abcd$, oder von $F(x)$, man hat daher:

$$\begin{aligned} dF(x) &= \frac{ce(cd + ef)}{2} = \frac{dx(y + y + dy)}{2} \\ &= ydx + \frac{dx dy}{2}. \end{aligned}$$

Da $\frac{dx dy}{2}$ ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung ist, welches gegen das unendlich Kleine der ersten Ordnung verschwindet, so erhält man:

$$dF(x) = ydx,$$

daher:

$$F(x) = \int y dx,$$

wie auch oben gefunden wurde.

134) Die Constante des Integrals, welches nach der Gleichung No. 170 den Flächeninhalt der Curve ausdrückt, ist so zu bestimmen, dass für $x=a$ das Integral Null wird. Denn es wird durch jene Gleichung der Flächeninhalt von der Ordinate ab aus, deren Abscisse $Aa=a$ ist, angegeben, also so angegeben, dass, für $x=a$, der Flächeninhalt Null ist.

Gesetzt es sei $\int f(x) dx = \varphi(x) + C$, so hat man zur Bestimmung von C die Gleichung

$$0 = \varphi(a) + C.$$

Es wird hierdurch:

$$\int f(x) dx = \varphi(x) - \varphi(a).$$

Folglich ist:

$$F(x) = \varphi(x) - \varphi(a).$$

Bringt man die für bestimmte Integrale eingeführte Bezeichnung in Anwendung, so hat man auch

$$171) \quad F(x) = \int_a^x f(x) dx.$$

Bezeichnet man allgemein den Flächeninhalt, der von $x=a$ bis $x=b$ genommen werden soll, durch s , so hat man:

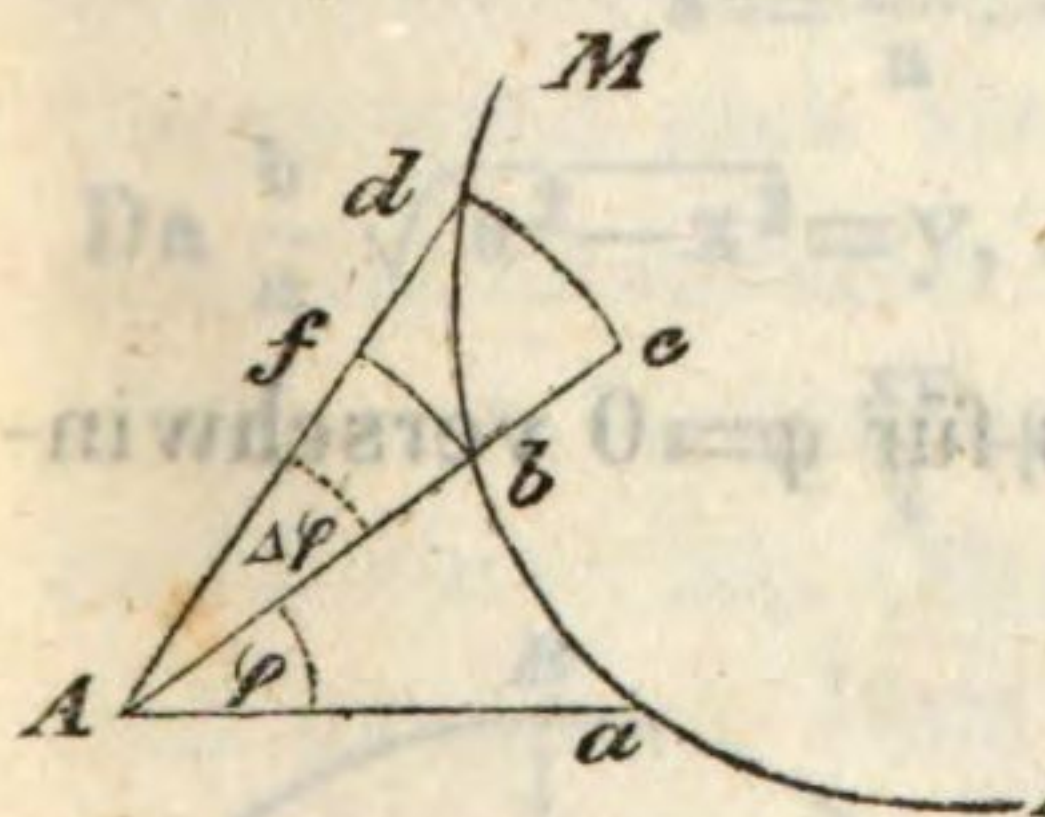
$$172) \quad s = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx.$$

Die Formel No. 171 drückt den Flächeninhalt der Curve von einer bestimmten Grenze $x=a$ bis zu einer willkürlichen Grenze x hin aus, während No. 172 den Flächeninhalt zwischen zwei bestimmten Grenzen angiebt.

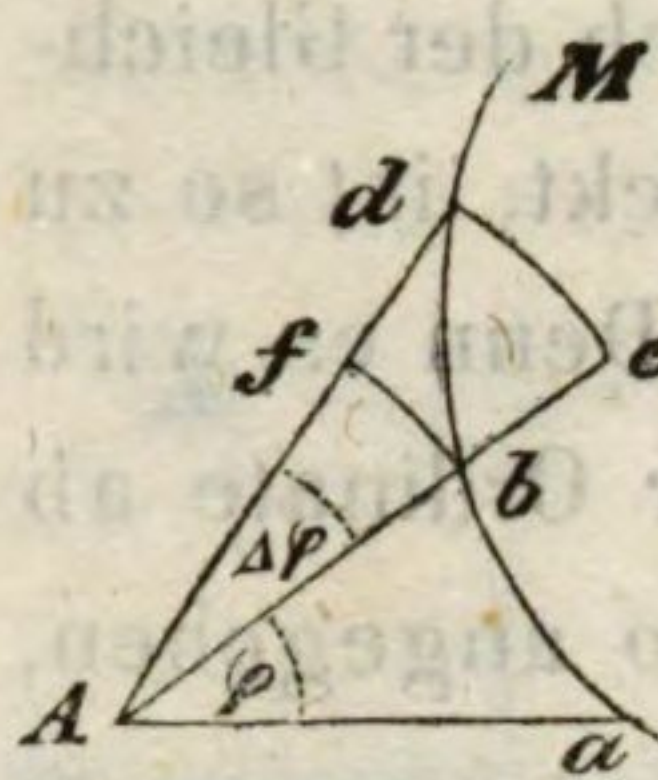
135) Unter dem Flächeninhalt einer Curve, die durch eine Gleichung ihrer Polarcordinaten gegeben ist, versteht man die von zwei Radii-Vectores und von der Curve begrenzte Fläche.

Es sei $u=f(\varphi)$ die Gleichung einer Curve MN , wo u den Radius-Vector und φ den veränderlichen Winkel bezeichnet.

Wenn Aa der Radius-Vector für den Winkel $\varphi=0$ ist, und wenn $Ab=u$,



so ist der Flächeninhalt von aAb offenbar irgend eine Function von φ , deren Beschaffenheit von



der gegebenen Gleichung $u = f(\varphi)$ abhängt. Bezeichnet s den Flächeninhalt von aAb , so ist also

$$s = F(\varphi).$$

Wenn φ um $\Delta\varphi$ zunimmt, so nimmt $F(\varphi)$

um $\Delta F(\varphi)$ zu, und man hat

$$bAd = \Delta F(\varphi) = \Delta s.$$

Der Inhalt des Kreisausschnittes cAd ist:

$$cAd = \frac{cd \cdot cA}{2}.$$

Es ist aber $cA = dA = u + \Delta u$, und $cd = cA \cdot \Delta\varphi = (u + \Delta u) \Delta\varphi$, folglich

$$cAd = \frac{(u + \Delta u)^2 \Delta\varphi}{2}.$$

Der Inhalt des Kreisausschnittes bAf ist

$$bAf = \frac{bf \cdot bA}{2} = \frac{u^2 \Delta\varphi}{2}.$$

Das Verhältniss der Inhalte beider Abschnitte ist hiernach:

$$\frac{cAd}{bAf} = \frac{(u + \Delta u)^2}{u^2}.$$

Dieses Verhältniss wird gleich dem der Einheit für den Fall dass $\Delta\varphi$, also auch Δu , verschwindend klein wird.

Da nun bAd kleiner als der Ausschnitt cAd und grösser als bAf ist, so muss um so mehr für den Fall, dass $\Delta\varphi$ verschwindend klein wird, der Bruch

$$\frac{bAd}{bAf} = \frac{\Delta F(\varphi)}{\frac{u^2 \Delta\varphi}{2}} = \frac{\Delta s}{\frac{u^2 \Delta\varphi}{2}}$$

gleich der Einheit werden.

In diesem Falle geht aber Δ in d über, so dass man hat

$$ds = \frac{u^2 d\varphi}{2}.$$

Hieraus folgt:

$$173) \quad s = \frac{1}{2} \int u^2 d\varphi.$$

Dieses Integral ist so zu nehmen, dass es für $\varphi = 0$ verschwindet. Man kann daher auch schreiben:

$$s = \frac{1}{2} \int_0^\varphi u^2 d\varphi.$$

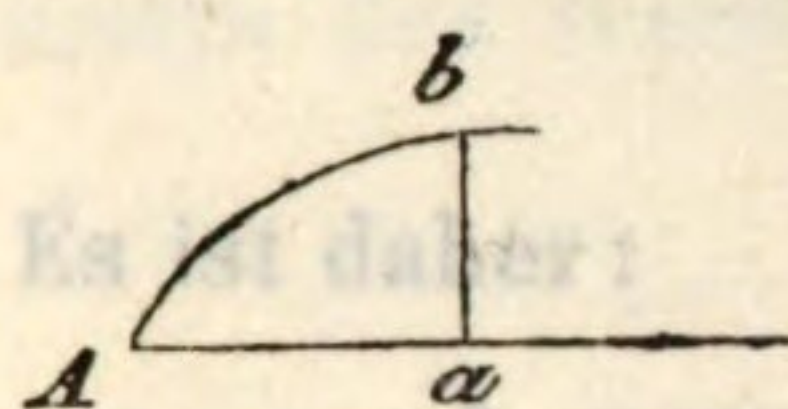
Sollte hingegen der Flächeninhalt innerhalb der Grenäen $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ bestimmt werden, so hätte man

$$174) \quad s_1 = \frac{1}{2} \int_a^\beta u^2 d\varphi.$$

136) Zur Erläuterung des bisherigen dienen folgende Beispiele.

Die Gleichung der Parabel ist:

$$y^2 = bx, \text{ oder } y = \sqrt{bx}.$$



Der Flächeninhalt eines beliebigen Stückes

Aab, also von $x=0$, bis zu einem noch will-

kürlichen Werth von x ist nach der Gleichung

No. 172:

$$s = \int_0^x y dx = \int_0^x \sqrt{bx} dx = \frac{2}{3} \sqrt{bx} \cdot x = \frac{2}{3} xy.$$

Ist in einem speciellen Falle $x=\alpha$, also $y=\sqrt{b\alpha}=\beta$, so erhält man:

$$s = \frac{2}{3} \alpha \beta.$$

Die Gleichung der Ellipse ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ oder } y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

wo a und b die halbe grosse und halbe kleine Achse bezeichnen.

Der Flächeninhalt von $x=0$ bis zu einem unbestimmten Werth x der Abscisse wird nach No. 172 ausgedrückt durch

$$s = \int_0^x \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Das unbestimmte Integral $\int \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$ wird unter Anwendung der Formeln No. 71 und 92 erhalten, und ist:

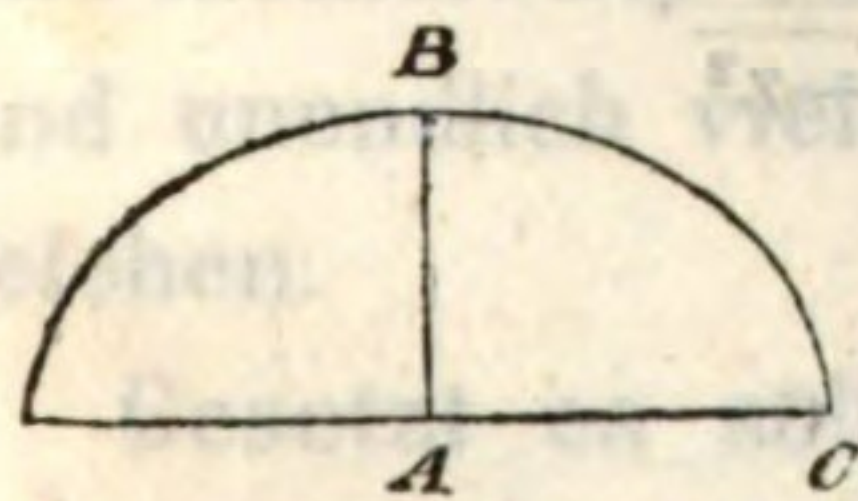
$$\int \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{ab}{2} \text{Arc} \left(\sin = \frac{x}{a} \right).$$

Es ist daher:

$$s = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{ab}{2} \text{Arc} \left(\sin = \frac{x}{a} \right).$$

Da $\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = y$, so hat man auch:

$$s = \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2} \text{Arc} \left(\sin = \frac{x}{a} \right).$$



Wird das Integral von $x=0$ bis $x=Ac=a$ genommen, so erhält man den Flächeninhalt von ABC. Man hat zu diesem Zwecke nur in der vorhergehenden Gleichung $x=a$

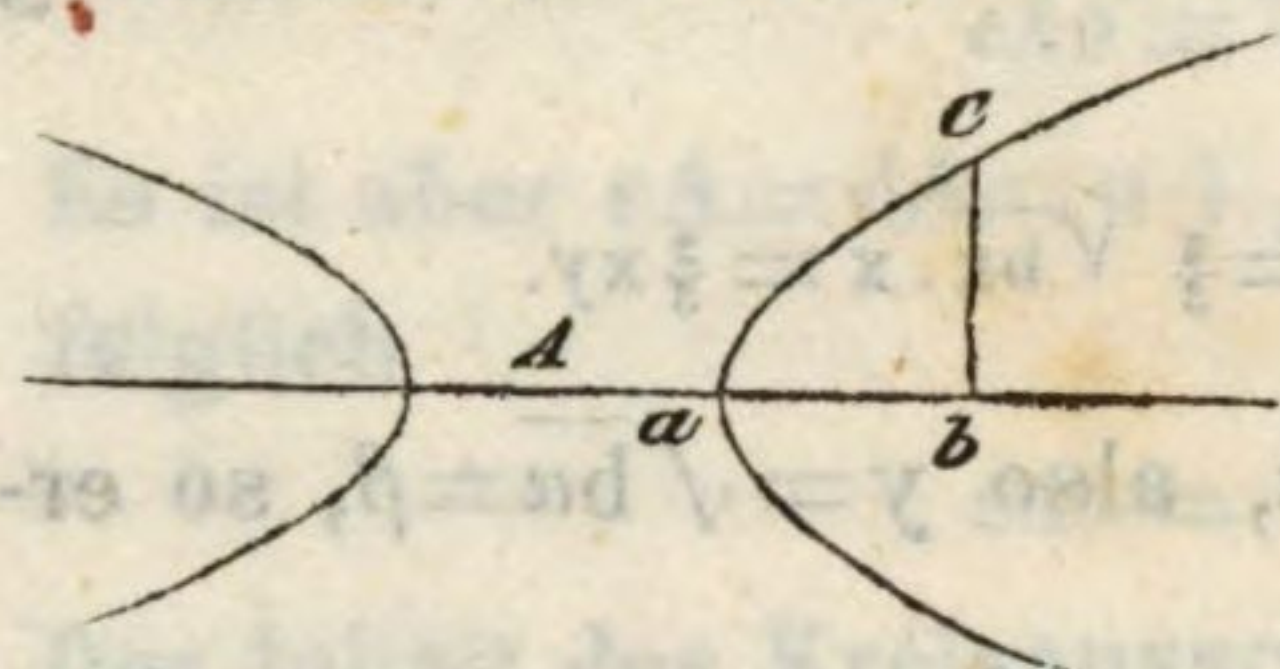
zu setzen, und zu berücksichtigen, dass hierdurch nach der gegebenen Gleichung y Null wird. Man erhält:

$$s = \frac{\pi \cdot ab}{4}.$$

Der Flächeninhalt der ganzen Ellipse ist daher $\pi \cdot ab$.

Zu einem dritten Beispiele diene die Quadratur der Hyperbel. Die Gleichung der Hyperbel ist:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ oder } y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$



Der Flächeninhalt s von abc , d. h. von $x=Aa=a$ bis $Ab=x$, ist:

$$s = \int_a^x \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} dx.$$

Das unbestimmte Integral $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$ kann nach den früher gegebenen Regeln in folgender Weise hergestellt werden.

Es ist:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Durch theilweises Integriren findet man:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = x \sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2} dx.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der vorhergehenden, so findet man:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Die irrationale Formel $\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ wird rational durch die Substitution $\sqrt{x^2 - a^2} = xz$. Denn es folgt aus derselben

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 - z^2}},$$

folglich wird:

$$dx = \frac{az dz}{(1 - z^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ und } \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{az}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Es wird daher:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{dz}{1 - z^2} = \frac{1}{2} \lg \frac{1+z}{1-z} + C.$$

Führt man den Werth von z , nämlich $z = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$, wieder ein, so findet man:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \frac{1}{2} \lg \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{x - \sqrt{x^2 - a^2}} + C, \\ &= \lg \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} + C. \end{aligned}$$

Es ist daher:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \lg \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} + C.$$

Das bestimmte Integral $\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} dx$ wird hiernach:

$$\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \lg \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Der gesuchte Flächeninhalt s wird hierdurch

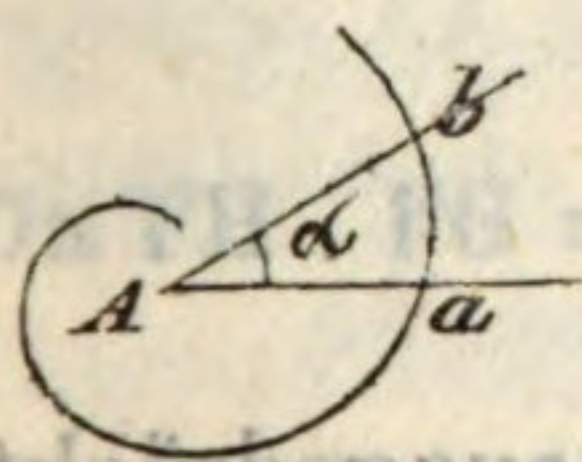
$$\begin{aligned} s &= \frac{x}{2} \cdot \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{ab}{2} \lg \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \\ &= \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \lg \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right). \end{aligned}$$

Zu einer Anwendung der Formel No. 174 soll die Quadratur der logarithmischen Spirale dienen. Ihre Gleichung, in Polar-Coordinationen ausgedrückt ist $\varphi = \lg u$, wo a die Basis des Logarithmensystems bezeichnen soll. Man kann daher auch die Gleichung dieser Linie in folgender Weise schreiben:

$$a^\varphi = u.$$

Für $\varphi = 0$ wird $u = 1$. Es soll in der Figur Aa diesen Werth von u bezeichnen. Wenn φ zunimmt, so nimmt auch u zu. Die Curve wird sich also von a aus mehr und mehr von A entfernen und unendliche viele Windungen um A darstellen. Wenn φ kleiner als Null oder negativ wird, so wird auch u immer kleiner und kleiner. Die Curve wird sich also mehr und mehr A nähern und unendlich viele Windungen um A machen, ohne A zu erreichen.

Gesetzt es soll der Flächeninhalt s von aAb , also von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \alpha$ bestimmt werden.



Nach der Gleichung No. 174 erhält man

$$s = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} u^2 d\varphi.$$

Nun folgt aus der gegebenen Gleichung der Spirale, dass $u^2 = a^{2\varphi}$. Es ist daher

$$s = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} a^{2\varphi} d\varphi.$$

Das unbestimmte Integral $\int a^{2\varphi} d\varphi$ ist

$$\int a^{2\varphi} d\varphi = \frac{a^{2\varphi}}{2 \lg a} + C.$$

Hiernach wird

$$s = \frac{1}{4 \lg a} (a^{2\alpha} - 1).$$

137) Rectification der ebenen Curven. Unter der Rectification einer Curve versteht man die Bestimmung der Länge eines bestimmten Stückes der Curve. In §. 76 wurde für das Differential des Bogens, in rechtwinkligen Ordinaten ausgedrückt, folgende Gleichung gefunden:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Die Länge des Bogens, dessen Grenzpunkte durch die Abscissen $x = \alpha$ und $x = \beta$ bestimmt werden, ist daher

$$175) s = \int_{\alpha}^{\beta} dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Das Differential des Bogens, in Polar-Cordinaten ausgedrückt, ist nach §. 76

$$ds = \sqrt{du^2 + u^2 d\varphi^2}.$$

Die Länge des Bogens von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = \beta$, wird daher durch das bestimmte Integral

$$176) s = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \sqrt{u^2 + \frac{du^2}{d\varphi^2}}$$

ausgedrückt.

1tes Beispiel.

Die Gleichung der Cycloide ist nach §. 71

$$x = a \text{ Arc. } \left(\sin = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a} \right) - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Man erhält hieraus:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ay - y^2}}.$$

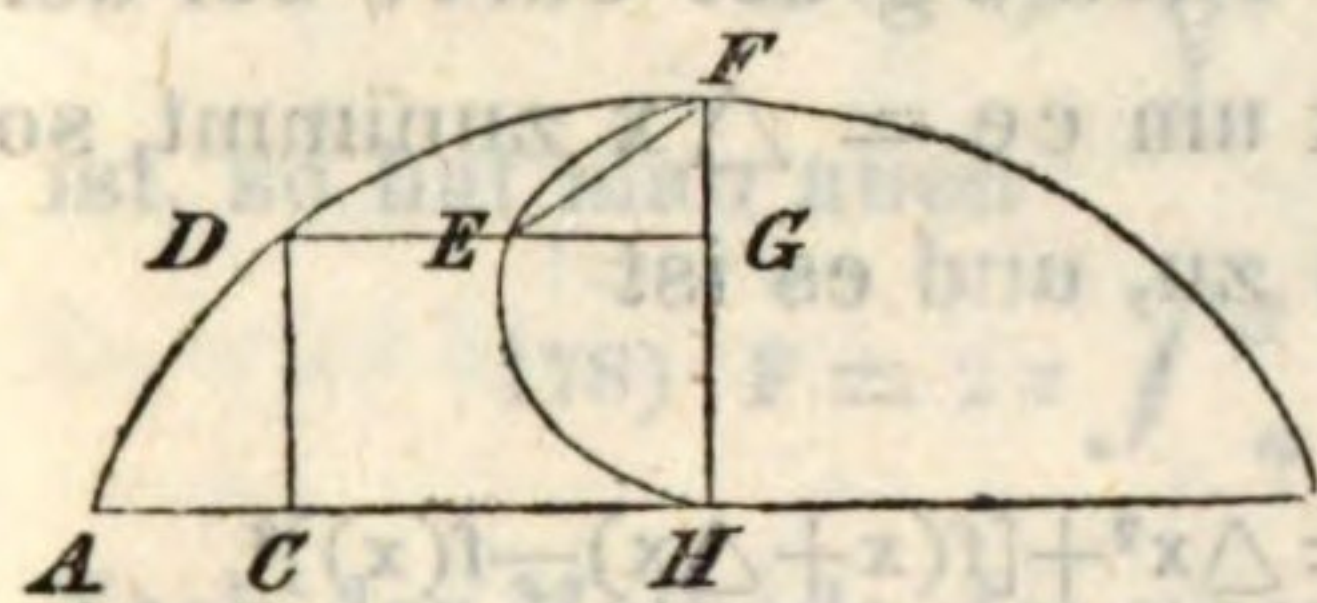
Es ist aber $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dy \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$. Führt man hierin den Werth von $\frac{dx}{dy}$ ein, so erhält man:

$$ds = dy \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a - y}}.$$

Es ist daher:

$$s = \sqrt{2a} \int \frac{dy}{\sqrt{2a - y}} = -\sqrt{2a} \cdot 2 \sqrt{2a - y} + C.$$

Es ist hier der Bogen durch eine Function von y ausgedrückt, weil die Beschaffenheit der Gleichung der Cycloide diese Function einfacher erscheinen lässt, als wenn durch x der Bogen ausgedrückt würde.



Das bestimmte Integral von $y = 0$ bis $y = CD$ führt zu der Gleichung

$$s = -2\sqrt{2a(2a - CD)} + 4a.$$

Da $FH = 2a$, und $FG = FH - CD = 2a - CD$ ist, so hat man auch

$$s = -2\sqrt{FH \cdot FG} + 2FH.$$

Da $FH \cdot FG = FE^2$, so hat man auch

$$s = -2FE + 2FH.$$

Es ist hierdurch die Länge des Bogens AD ausgedrückt. Für den Bogen ADF wird FE Null, daher $ADF = 2FH$.

2tes Beispiel.

Die Gleichung der logarithmischen Spirale ist: $a^\varphi = u$. Es ist daher

$$\frac{du}{d\varphi} = a^\varphi \lg a.$$

Folglich wird

$$ds = \int d\varphi \sqrt{a^{2\varphi} + a^{2\varphi} (\lg a)^2},$$

daher

$$s = a^\varphi \frac{\sqrt{1 + (\lg a)^2}}{\lg a} + C.$$

Das bestimmte Integral von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = \beta$ wird daher

$$s = (a^\beta - a^\alpha) \cdot \frac{\sqrt{1 + (\lg a)^2}}{\lg a}.$$

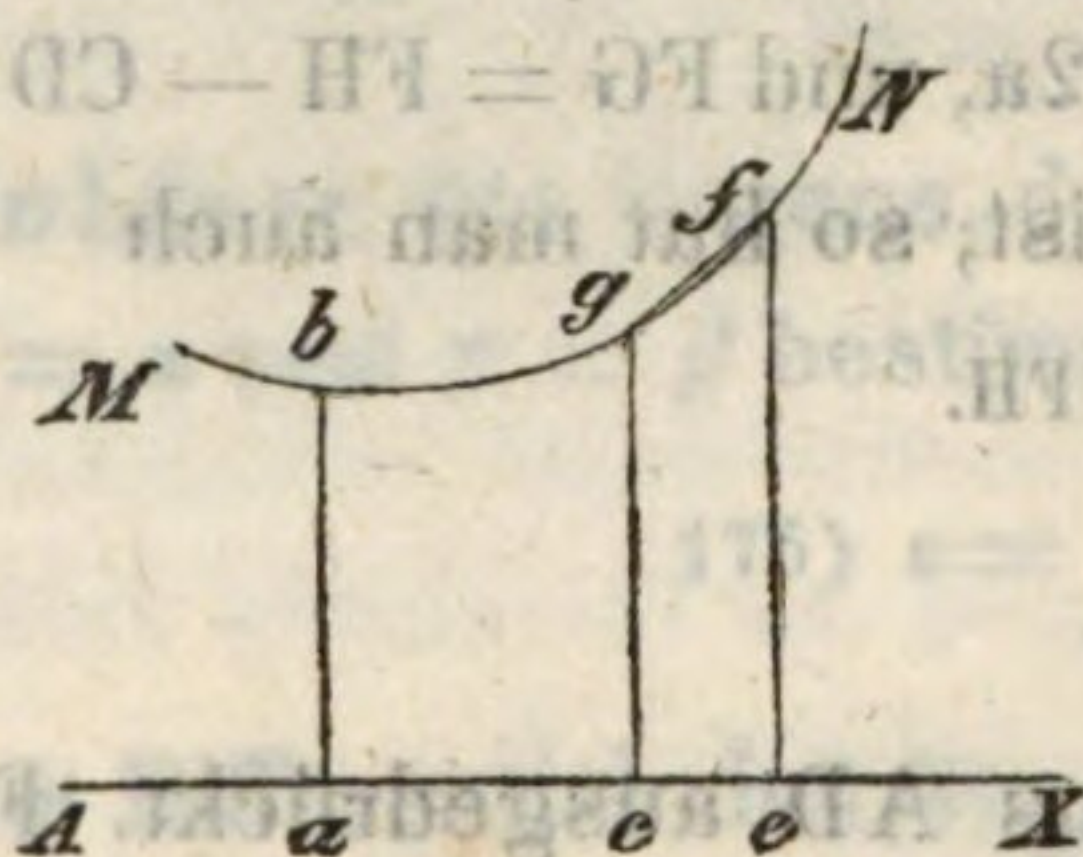
a^β u. a^α sind die Werthe der Radii Vectores, die den Winkeln β und α entsprechen. Bezeichnet man dieselben durch u_2 und u_1 , so hat man auch

$$\frac{s}{u_2 - u_1} = \frac{\sqrt{1 + (\lg a)^2}}{\lg a}.$$

Der von zwei Radien begrenzte Bogen hat daher zur Differenz derselben Radien ein constantes Verhältniss.

138) Quadratur der Rotations-Oberflächen. Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer ebenen Curve MN. Wird dieselbe um die Abscissenachse AX gedreht, so beschreibt sie eine Fläche. Die Quadratur derselben ist der Gegenstand der folgenden Untersuchung.

Es sei F die Fläche, welche der Theil bg der Curve bei der Rotation um AX beschreibt. Wenn x um $ce = \Delta x$ zunimmt, so nimmt cy = y um $f(x + \Delta x) - f(x)$ zu, und es ist



$$gf^2 = \Delta x^2 + [f(x + \Delta x) - f(x)]^2$$

Die Rotation von gf um AX erzeugt die Oberfläche eines abgekürzten Kegels. Man hat für dieselbe

$$\text{Fläche des abgekürzten Kegels} = 2\pi \cdot \frac{cg + ef}{2} \cdot gf$$

$$= 2\pi \cdot \frac{f(x) + f(x + \Delta x)}{2} \cdot \sqrt{\Delta x^2 + [f(x + \Delta x) - f(x)]^2}.$$

Dividirt man durch Δx , so erhält man

$$\frac{\text{Fläche des abgek. Kegels}}{\Delta x}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{f(x) + f(x + \Delta x)}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)^2}.$$

In dem speciellen Falle, in welchem Δx verschwindend klein wird, fällt die Fläche des abgekürzten Kegels mit der verschwindend kleinen Zunahme der Rotationsfläche F zusammen.

Man erhält daher

$$\frac{dF}{dx} = 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dfx}{dx}\right)^2}.$$

Es ist aber $f(x) = y$, $df(x) = dy$, daher

$$dF = 2\pi y \cdot dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Folglich ist

$$F = 2\pi \int y \, dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Soll die Oberfläche innerhalb der Grenzen $x = \alpha$ und $x = \beta$ bestimmt werden, so hat man

$$177) \quad F = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y \, dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Da das Differential des Bogens oder

$$ds = dy \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

ist, so hat man auch

$$178) \quad F = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y \, ds.$$

Nach der Methode der unendlich Kleinen wird dasselbe Resultat in folgender Weise erhalten. Wenn x um ein unendlich kleines Stück $ce = dx$ zunimmt, so nimmt y um dy , und der Bogen $bg = s$ nimmt um ds zu. Die Zunahmen dF der Rotationsfläche ist gleich der Oberfläche des abgekürzten Kegels, der durch Rotation des unendlich kleinen Curvelementes ds um AX entsteht. Man hat daher

$$\begin{aligned} dF &= 2\pi \frac{cg + ef}{2} \, gf = 2\pi \frac{y + y + dy}{2} \, ds \\ &= 2\pi y \, ds + \pi dy \, ds. \end{aligned}$$

Da $\pi dy \, ds$ als ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung gegen das unendlich Kleine der ersten Ordnung wegfällt; so hat man

$$dF = 2\pi y \, ds,$$

folglich

$$dF = 2\pi \int y \, ds.$$

Beispiel. Die Rotationsfläche sei die Oberfläche des Rotations-Ellipsoids, d. h. die durch Umdrehung einer Ellipse um eine ihrer Achsen entstandene Fläche.

Die Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ oder } y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

wo a und b die halbe grosse und halbe kleine Achse bezeichnen.

Aus der Gleichung der Ellipse folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Man erhält für die Oberfläche des durch Rotation um die grosse Achse entstandenen Ellipsoids, wenn man die Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$ in *No. 177* einführt, folgende Gleichung

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a}{b} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2}} \\ &= 2\pi \frac{b}{a} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{a^2 - x^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2}} \cdot dx. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{a^2 - x^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2}} \cdot dx \\ &= \frac{1}{a} \int \sqrt{[a^4 - x^2(a^2 - b^2)]} \cdot dx \\ &= \frac{x}{2a} \sqrt{a^4 - x^2(a^2 - b^2)} + \frac{a^3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}} \\ &= \frac{x}{2a} \sqrt{a^4 - x^2(a^2 - b^2)} + \frac{a^3}{2 \sqrt{a^2 - b^2}} \text{Arc} \left(\sin = x \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \right) + C. \end{aligned}$$

Nachdem das unbestimmte Integral gefunden ist, hat es keine Schwierigkeit das bestimmte Integral herzustellen. In einem Falle wird die Formel ziemlich einfach, nämlich wenn das Integral von $x=0$ bis $x=a$ genommen wird, wornach also die Endgleichung die Oberfläche des halben Rotations-Ellipsoides ausdrückt. Man findet für diesen Fall

$$F = 2\pi \frac{b}{a} \left[\frac{1}{2} ab + \frac{a^3}{2\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{Arc} \left(\sin = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \right) \right]$$

$$= \pi b \left[b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{Arc} \left(\sin = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \right) \right].$$

Wenn die Rotation nicht um die grosse, sondern um die kleine Achse erfolgt, und wenn die kleine Achse zugleich zur Abscissenachse gewählt wird, wornach also

$$\frac{x_1^2}{b^2} + \frac{y_1^2}{a^2} = 1$$

die Gleichung der erzeugenden Curve ist, so hat man zur Bestimmung der Rotationsfläche nur in *No. 177* y_1 statt y und $\frac{dy_1}{dx_1}$ statt $\frac{dy}{dx}$ zu setzen. Es ist aber

$$y_1 = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x_1^2}$$

und

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{a}{b} \frac{x_1}{\sqrt{b^2 - x_1^2}}.$$

Es wird hierdurch

$$F = 2\pi \int_a^\beta \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x_1^2} \cdot dx_1 \sqrt{\left(1 + \frac{a^2 x_1^2}{b^2(b^2 - x_1^2)}\right)}$$

$$= 2\pi \frac{a}{b^2} \int_a^\beta \sqrt{b^4 + x_1^2(a^2 - b^2)} \cdot dx_1.$$

Das unbestimmte Integral von $\sqrt{b^4 + x_1^2(a^2 - b^2)} dx_1$ ist:

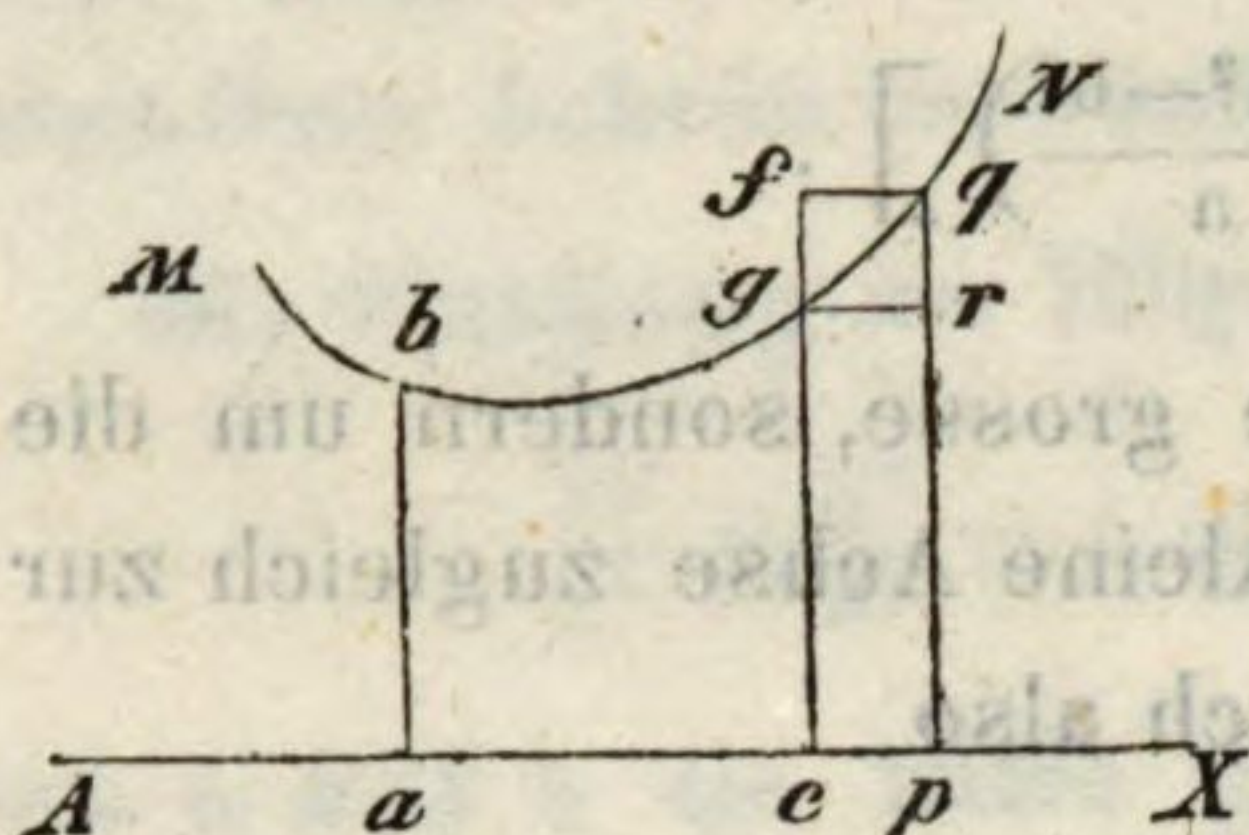
$$\int \sqrt{b^4 + x_1^2(a^2 - b^2)} dx_1$$

$$= \frac{x_1}{2} \sqrt{b^4 + x_1^2(a^2 - b^2)} + \frac{b^4}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \lg \left(x_1 \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{b^4 + x_1^2(a^2 - b^2)} \right) + C.$$

Wird das Integral von 0 bis b genommen, also die halbe Oberfläche des Ellipsoides bestimmt, so erhält man

$$F = \pi a^2 + \frac{\pi a b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \lg (b \sqrt{a^2 - b^2} + ab).$$

139) Volumen der durch Rotation einer Linie oder Curve entstandenen Körper. Es sei $y=f(x)$ die Gleichung



einer Curve MN. Die Rotation von MN um die Abscissenachse AX erzeugt eine krumme Fläche. Der Raum, der durch dieselbe begrenzt wird, kann in folgender Weise bestimmt werden.

Es sei V das Volumen des durch Rotation von $abgc$ um AX entstehenden Körpers. Nimmt $Ac = x$ um $ep = \Delta x$ zu, so wächst $cg = y$ um Δy , und man hat $pq = y + \Delta y$, oder, da $y = f(x)$, so ist auch $pq = f(x + \Delta x)$. Durch Rotation des Rectangels $cfqp$ wird ein Cylinder beschrieben, dessen Halbmesser pq und dessen Höhe fq ist. Der Inhalt desselben ist daher

$$\pi \cdot pq^2 \cdot fq = \pi [f(x + \Delta x)]^2 \Delta x.$$

Durch Rotation des Rectangels $cgrp$ wird ebenfalls ein Cylinder beschrieben. Der Inhalt desselben ist

$$\pi \cdot cg^2 \cdot gr = \pi [f(x)]^2 \Delta x.$$

Es ist daher

$$\frac{\pi \cdot pq^2 \cdot fg}{\pi \cdot cg^2 \cdot gr} = \frac{\pi [f(x + \Delta x)]^2 \cdot \Delta x}{\pi [f(x)]^2 \cdot \Delta x}.$$

Dieses Verhältniss wird gleich dem der Einheit für den Fall, dass Δx verschwindend klein oder Null wird.

Durch die Rotation von $cgpq$ wird ein Raum beschrieben, der die Zunahme des Volumens V ausdrückt, für den Fall dass x um Δx zunimmt. Es ist daher derselbe zu bezeichnen durch ΔV .

Da ΔV kleiner als der durch Rotation von $cfqp$ und grösser als der durch Rotation von $cgrp$ entstandene Cylinder ist, und da ferner das Verhältniss beider Cylinder für einen verschwindend kleinen Werth von Δx gleich dem der Einheit wird, so muss um so mehr

$$\frac{\Delta V}{\pi \cdot cg^2 \cdot gr} = \frac{\Delta V}{\pi \cdot [f(x)]^2 \cdot \Delta x}$$

für den Fall, dass Δx verschwindend klein wird, gleich der Einheit werden. Man hat daher

$$\frac{dV}{\pi [f(x)]^2 dx} = 1.$$

Hieraus folgt

$$V = \pi \int [f(x)]^2 dx.$$

Da $f(x) = y$ ist, so hat man auch

$$V = \pi \int y^2 dx.$$

Dieses Integral ist so zu verstehen, dass es für $x = Aa = \alpha$ verschwindet. Man kann dies in folgender Art bezeichnen

$$V = \pi \int_{\alpha}^x y^2 dx.$$

Das Volumen von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ ist daher

$$178) V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx.$$

1tes Beispiel.

Die Gleichung der geraden Linie ist

$$y = ax + b.$$

Die Rotation derselben um die Achse der x erzeugt eine Kegelfläche. Der Inhalt des Kegels von $y = 0$ bis $y = r$ ist nach No. 178

$$V = \pi \int_0^r y^2 dx.$$

Es ist aber

$$dx = \frac{dy}{a},$$

daher

$$V = \pi \int_0^r y^2 \frac{dy}{a} = \pi \cdot \frac{r^3}{3a}.$$

Für $y = r$ wird $x = \frac{r-b}{a}$, und für $y = 0$ wird $x = -\frac{b}{a}$.

Es ist daher das Stück der Abscissenachse, von $y = 0$ bis $y = r$, gleich $\frac{r}{a}$ gleich der Höhe des Kegels. Man hat daher

$$V = \pi r^2 \frac{h}{3}.$$

2tes Beispiel.

Durch Rotation einer Ellipse um ihre grosse Achse entsteht ein Rotationsellipsoid. Die Gleichung der erzeugenden Curve ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2).$$

Führt man den Werth von y^2 in No. 178 ein, so erhält man:

$$V = \pi \int_a^\beta \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx.$$

Das unbestimmte Integral von $(a^2 - x^2) dx$ ist

$$\int (a^2 - x^2) dx = a^2 x - \frac{x^3}{3}.$$

Es ist daher:

$$V = \pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 \beta - \frac{\beta^3}{3} - a^2 \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \right).$$

Das Integral von $x = 0$ bis $x = a$ gibt das Volumen des halben Rotationsellipsoides. Man erhält für dasselbe

$$V = \pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi a b^2.$$

140) Geometrische Bedeutung der singulären Integrale. Eine Gleichung $F(x, y, a) = 0$ kann immer betrachtet werden als der analytische Ausdruck einer ebenen Curve, deren rechtwinkelige Ordinaten x, y sind. Nimmt die constante Grösse a um Δa zu, so wird die Art der Curve nicht geändert. War etwa die gegebene Gleichung die eines Kreises, so wird eine Aenderung der Constanten, eine Aenderung der Lage des Mittelpunktes oder eine Aenderung der Grösse des Halbmessers oder eine Aenderung beider zugleich zur Folge haben, aber immer wird die neue Gleichung wieder die eines Kreises sein.

Die Zunahme von a um Δa , hat eine Zunahme von $F(x, y, a)$ um $\frac{\Delta F(x, y, a)}{\Delta a} \Delta a$ zur Folge. Die beiden Gleichungen

$$F(x, y, a) = 0, \text{ und } F(x, y, a) + \frac{\Delta F(x, y, a)}{\Delta a} \Delta a = 0$$

drücken zwei Curven aus, die sich nur durch ihre Constanten unterscheiden und daher der Art nach von einander nicht verschieden sind.

Wenn Δa verschwindend klein wird, so geht $\frac{\Delta F(x, y, a)}{\Delta a} \cdot \Delta a$ in $\frac{dF(x, y, a)}{da} da$ über. Die Gleichungen:

$$F(x, y, a) = 0, \text{ und } F(x, y, a) + \frac{dF(x, y, a)}{da} da = 0$$

drücken dann zwei unendlich nahe auf einander folgende, der Art nach nicht verschiedene, Curven aus. Wenn es Werthe von x und y gibt, die beiden Gleichungen zugleich genügen, so drücken eben diese Werthe die Ordinaten der Durchschnittspunkte beider Curven aus. Nun ist es aber offenbar gleichgültig ob man die Werthe von x und y aufsucht, die den vorgelegten Gleichungen, oder jene, welche den Gleichungen

$$F(x, y, a) = 0 \text{ und } \frac{dF(x, y, a)}{da} = 0$$

zugleich genügen. Die Ordinaten der Durchschnittspunkte beider Curven werden daher auch erhalten, wenn man die Werthe von x und y so bestimmt, dass den beiden letzten Gleichungen zugleich Genüge geleistet wird.

Eliminirt man a aus den Gleichungen

$$F(x, y, a) = 0, \text{ und } \frac{dF(x, y, a)}{da} = 0,$$

so erhält man eine Gleichung zwischen x und y , welche den geometrischen Ort der Durchschnittspunkte jener Linien ausdrückt, die in der Gleichung $F(x, y, a) = 0$ enthalten sind, und wirklich aus derselben hervorgehen, wenn man für a successiv verschiedene Werthe setzt. Es ist hiermit nicht gesagt, dass die Elimination von a aus den eben erwähnten Gleichungen stets zu einem Resultate führen müsse. Denn es kann sein, dass der Quotient $\frac{dF(x, y, a)}{da}$ kein a enthält und daher auch zu keiner Elimination Veranlassung giebt. In diesem Falle führt auch die successive Aenderung (Zu- oder Abnahme) von a in $F(x, y, a) = 0$ zu keiner Folge von Durchschnittspunkten, die ihrerseits wieder als die Linie des geometrischen Ortes der Durchschnittspunkte zu betrachten wäre.

Die Elimination von a aus

$$F(x, y, a) = 0, \text{ und } \frac{dF(x, y, a)}{da} = 0$$

führt aber, wie in §. 129 u. f. gezeigt wurde, zum singulären Integral, während $F(x, y, a) = 0$ das vollständige Integral ist. Das singuläre Integral drückt also eine Linie aus, welche den geometrischen Ort der Durchschnittspunkte jener Linien bezeichnet, die aus dem vollständigen Integral hervorgehen, wenn jener Constanten derselben, die im singulären Integral nicht enthalten ist, successiv zu- oder abnehmende Werthe beigelegt werden. Wegen eben dieser Eigenschaft wird die durch das singuläre Integral ausgedrückte Linie, eine Einhüllungslinie genannt. Diese Einhüllungslinie hat weiter die Eigenschaft alle die gleichartigen Curven, die sie einhüllt, und die, wie erwähnt, aus dem vollständigen Integrale hervorgehen, zu berühren.

Denn der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$, der aus dem singulären Integrale abgeleitet wird, hat mit dem aus dem vollständigen Integrale abgeleiteten einen gleichen Werth. Nun drückt aber nach §. 65 dieser Quotient die Tangente des entsprechenden Curvenelementes aus. Es besitzen daher die Einhüllungslinie und die eingehüllten Linien eine gemeinschaftliche Tangente, d. h. die Einhüllungslinie berührt die eingehüllten Linien.

Beispiel.

Die Gleichung

$$(\alpha) \quad y^2 + (x - b)^2 - ab = 0$$

ist die eines Kreises, dessen Halbmesser $\sqrt{ab}$ ist, und dessen Mittelpunkt in der Abscissenachse liegt. Lässt man b durch unendlich kleine Zu- und Abnahmen wachsen und abnehmen, so erhält man ein System von Kreisen mit zu- und abnehmenden Radien, deren Mittelpunkte alle in der Abscissenachse liegen. Die Gleichung der Einhüllungslinie dieser Kreise wird erhalten, wenn man das singuläre Integral des durch die Gleichung (α) schon bekannten vollständigen Integrals be-

stimmt. Differentirt man zu diesem Zweck in Hinsicht b , so findet man

$$-2(x-b) - a = 0.$$

Hieraus folgt

$$b = \frac{a + 2x}{2}.$$

Führt man diesen Werth in (α) ein, so erhält man das singuläre Integral

$$y^2 - \frac{a^2}{4} - ax = 0.$$

Diese Gleichung ist die einer Parabel. Die Einhüllungsline der in der Gleichung (α) enthaltenen Kreise ist daher eine Parabel.

Zweite Abtheilung.

Integration der Differentialformeln des zweiten Grades und höherer Grade mit einer unabhängig Veränderlichen.

141) Alle in der ersten Abtheilung versuchten Integrationen lassen sich bezeichnen als Integrationen der Gleichungen

$$dy = f(x)dx \text{ und } F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

von denen die erste die unabhängig Veränderliche x gesondert von y darbietet, die zweite hingegen die Grössen x , y und den ersten Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ in irgend einer, durch die Gleichung näher bestimmten, Verbindung enthält. Beide Fälle stimmen darin überein, dass nur eine unabhängig Veränderliche und nur der erste Differentialquotient der abhängig Veränderlichen in der zu integrierenden Gleichung vorkommen. Geht man einen Schritt weiter und versucht man die Integration solcher Gleichungen, die ausser dem ersten Differentialquotienten auch den zweiten und höhere Quotienten enthalten, so handelt es sich im Allgemeinen um die Integration der Gleichungen:

$$d^n y = f(x)dx^n, \text{ und } F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

Die Integration der ersten dieser Gleichungen bietet keine Schwierigkeiten dar, die der zweiten hingegen ist mit solchen Schwierigkeiten umgeben, dass im Allgemeinen ihr Integral sich nicht bestimmen lässt. Es handelt sich daher für sie nur um die Bezeichnung jener einfacheren Fälle, in welchen die Integration gelingt.

142) Die Function, durch deren n malige Differentiation $d^n y = f(x) dx^n$ erhalten wird, lässt sich in folgender Weise bestimmen. Es ist :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) = f(x),$$

daher :

$$d \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = f(x) dx,$$

folglich :

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int f(x) dx + C_1.$$

Durch ein ähnliches Verfahren findet man :

$$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \int dx \int f(x) dx + C_1 x + C_2,$$

$$\frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} = \int dx \int dx \int f(x) dx + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

u. s. w.

Jede folgende Integration führt zu einer neuen Constanten, so dass das vollständige Integral, welches hier nach einer n maligen Integration erhalten wird, auch n neue constante Grössen enthalten muss.

143) Das Integral der Gleichung :

$$F \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n} \right) = 0$$

kann, wie schon erwähnt nur in speciellen Fällen hergestellt werden. Die nähere Betrachtung solcher Fälle wird sogleich folgen, nachdem nur zuvor einige allgemeinere Sätze in Bezug auf die Differentialgleichungen überhaupt, aufgestellt sind.

Das zweite Differential einer Gleichung

$$1) \quad F(x, y, a, b) = 0$$

kann auf zweierlei Wegen erhalten werden. Erstens dadurch, dass man zweimal nacheinander differentirt, und hierauf die

Constanten a, b eliminirt. Zweitens dadurch, dass man zunächst nur das erste Differential der gegebenen Gleichung herstellt. Es hat dasselbe die Form

$$2) \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a, b\right) = 0.$$

Eliminirt man aus (1) und (2) einmal a und dann b , so erhält man zwei Gleichungen von folgender Form:

$$3) \quad \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right) = 0,$$

$$4) \quad \varphi_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, b\right) = 0.$$

Beide Gleichungen drücken das erste Differential der Gleichung (1) aus. Differentirt man (3) und (4) von Neuem, so erhält man zwei Gleichungen von der Form

$$5) \quad \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, a\right) = 0,$$

$$6) \quad \psi_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, b\right) = 0.$$

Eliminirt man aus (3) und (5) die Constante a , oder aus (4) und (6) die Constante b , so erhält man in beiden Fällen das zweite Differential der gegebenen Gleichung (1).

Man kann entsprechend den zwei verschiedenen Wegen der Herstellung des zweiten Differentials einer Gleichung, auch zwei Wege zur Bestimmung des Integrals einer gegebenen Differentialgleichung des zweiten Grades einschlagen. Man kann nämlich erstens zweimal nacheinander integrieren, oder man kann zweitens die beiden verschiedenen Differentialgleichungen (3) und (4) des ersten Grades, die einer Differentialgleichung des zweiten Grades zukommen, durch eine erste Integration aufsuchen, und hat hierauf nur aus diesen Gleichungen den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ zu eliminiren, um das vollständige Integral zu erhalten.

Es lässt sich leicht einsehen, dass dieser Satz ganz allgemein ist, so dass von einer Differentialgleichung des n ten Grades ebensowohl durch eine n malige Integration das vollständige Integral erhalten wird, wie dadurch dass man die n Differential-

gleichungen des $n-1$ ten Grades aufsucht, die der Gleichung des n ten Grades zukommen, und hierauf aus diesen n Gleichungen die $n-1$ unbekannten Grössen $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ eliminirt.

144) Integration der Differentialgleichungen des zweiten Grades. Der allgemeinste Ausdruck einer Differentialgleichung des zweiten Grades ist:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

Die speciellen Fälle, die in dieser allgemeineren Form enthalten sind, lassen sich in zwei Klassen theilen, von denen die erste jene Gleichungen umfasst, in welchen nur eine der Grössen $x, y, \frac{dy}{dx}$ in Verbindung mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ vorkommt, die zweite hingegen

zwei der Grössen $x, y, \frac{dy}{dx}$ nebst dem Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ enthält.

Die Gleichungen, um deren Integration es sich handelt, sind hiernach

$$f\left(x, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0, \quad f\left(y, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0, \quad f\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

und

$$f\left(x, y, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0, \quad f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0, \quad f\left(x, y, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

Setzt man hierin $\frac{dy}{dx} = p$, daher $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, so gehen diese Gleichungen in folgende über:

$$f\left(x, \frac{dp}{dx}\right) = 0, \quad f\left(y, \frac{dp}{dx}\right) = 0, \quad f\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0,$$

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0, \quad f\left(y, \frac{dp}{dx}\right) = 0, \quad f\left(x, y, \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

145) Das Integral der Gleichung:

$$179) \quad f\left(x, \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

lässt sich nach den für die Integration der Differentialgleichungen des ersten Grades aufgestellten Regeln bestimmen. Man erhält hiernach p als eine Function von x , also im Allgemeinen:

$$p = \varphi(x) + C.$$

Da $p = \frac{dy}{dx}$, so hat man:

$$dy = \varphi(x)dx + Cdx,$$

daher:

$$180) \quad y = \int \varphi(x) dx + Cx + C_1,$$

welches das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung ist.

146) Um das Integral von

$$181) \quad f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

zu bestimmen, führe man zunächst den Werth von dx aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = p$ ein. Man erhält hierdurch:

$$f\left(y, p \frac{dy}{dy}\right) = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung lässt sich nach den früheren Regeln bestimmen. Man wird im Allgemeinen finden:

$$p = \varphi(y) + C.$$

Da $p = \frac{dy}{dx}$ ist, so hat man

$$dx = \frac{dy}{\varphi(y) + C},$$

daher:

$$182) \quad x = \int \frac{dy}{\varphi(y) + C} + C_1,$$

welche Gleichung wegen den beiden willkürlichen Constanten C und C_1 das vollständige Integral von (181) ausdrückt.

Beispiel.

Die gegebene Differentialgleichung sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -ay.$$

Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$, daher $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, so hat man:

$$\frac{dp}{dx} = -ay.$$

Da aber $dx = \frac{dy}{p}$, so hat man ferner:

$$p dp = -ay dy,$$

daher:

$$p^2 = -ay^2 + C,$$

folglich:

$$p = \sqrt{-ay^2 + C}.$$

Führt man hierin den Werth von p wieder ein, und sondert sogleich die Veränderlichen, so findet man:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{C - ay^2}}.$$

Hieraus folgt:

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Arc} \left(\sin = y \sqrt{\frac{a}{C}} \right) + C_1,$$

daher:

$$y = \sqrt{\frac{C}{a}} \sin \cdot \sqrt{a} (x - C_1).$$

147) Die Integration der Gleichung:

$$183) \quad f\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

ist ebenfalls nur soweit möglich, als dies die für die Integration der Gleichungen des ersten Grades aufgestellten Regeln zulassen. Man findet hiernach

$$\alpha) \quad x = P,$$

daher auch:

$$\beta) \quad p = X,$$

wo P eine Function von p , und X eine Function von x bezeichnet. Es folgt aus der ersten dieser Gleichungen

$$dx = \frac{dP}{dp} dp.$$

Da $dy = p dx$ ist, so hat man ferner

$$dy = p \cdot \frac{dP}{dp} dp,$$

daher:

$$\gamma) \quad y = \int p \frac{dP}{dp} dp + C.$$

Eliminirt man aus (α) und (γ) p , so erhält man eine Gleichung zwischen x und y , welche das Integral der Gleichung (183) ist.

Wenn aus der Gleichung (α) p als eine Function von x sich entwickeln lässt, wie dies die Gleichung (β) ausdrückt, so ist das vollständige Integral sehr leicht zu gewinnen, denn es ist $dy = p dx$, daher:

$$dy = X dx,$$

folglich:

$$y = \int X dx + C.$$

Beispiel.

Die gegebene Differentialgleichung sei:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy^2}{dx^2} = 0.$$

Man setze $\frac{dy}{dx} = p$, daher $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$. Man erhält hiernach:

$$\frac{dp}{dx} = -ap^2,$$

und hieraus:

$$-\frac{dp}{p^2} = a dx.$$

Es ist daher:

$$1) \quad \frac{1}{p} = ax + C_1.$$

Nun ist aber $dy = p dx$, man hat daher auch:

$$dy = -p \cdot \frac{dp}{ap^2}.$$

Hieraus erhält man:

$$2) \quad y = -\frac{1}{a} \lg p + C_2.$$

Eliminirt man aus (1) und (2) p , so findet man:

$$y = \frac{1}{a} \lg (ax + C_1) + C_2,$$

und hieraus

$$ax + C_1 = e^{a(y - C_2)},$$

welches wegen der beiden willkürlichen Constanten das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung ist.

Man kann dasselbe auch dadurch erhalten, dass man aus (1) p als Function von x entwickelt. Man hat hiernach

$$p = \frac{1}{ax + C_1},$$

daher:

$$dy = p dx = \frac{dx}{ax + C_1}.$$

Hieraus erhält man:

$$y = \frac{1}{a} \lg (ax + C_1) + C_2,$$

wie schon oben gefunden wurde.

148) Wenn in einer Differentialgleichung ausser dem Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ die beiden Grössen x und p , oder die Grössen y

und p vorkommen, so bleibt die Methode der Herstellung des Integrals im Wesentlichen dieselbe, wie in den vorhergehenden §§.

Gesetzt es sei

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

die zu integrirende Differentialgleichung.

Setzt man wie früher $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ so erhält man:

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

Diese Formel stimmt mit der der Differentialgleichungen des ersten Grades überein. Stellt man das Integral derselben nach den früher gegebenen Lehren her, so wird man aus demselben erhalten entweder

$$p = X,$$

oder

$$x = P,$$

wo X eine Function von x bezeichnet, in welcher zugleich die durch die Integration hervorgegangene willkürliche Constante enthalten ist, und wo P eine Function von p ist, die ebenfalls die willkürliche Constante enthält.

Ist das Erste der Fall, so hat man, da $p = \frac{dy}{dx}$ ist,

$$dy = X dx,$$

daher als vollständiges Integral

$$y = \int X dx + C.$$

Ist es leichter x als Function von p darzustellen, so dass man hat $x = P$, so hat man auch $dx = \frac{dP}{dp} dp$. Es wird hiernach

$$dy = p \cdot \frac{dP}{dp} dp,$$

folglich:

$$y = \int p \frac{dP}{dp} dp + C.$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung und aus der Gleichung $x = P$ den Quotienten $\frac{dy}{dx} = p$, so erhält man das gesuchte Integral.

Beispiel.

Es wird das Integral der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy^2}{dx^2} + x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$$

gesucht.

Man setze $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$. Hierdurch wird

$$p^2 \cdot \frac{dp}{dx} + x \frac{dp}{dx} = p,$$

folglich

$$p^2 dp = p dx - x dp.$$

Diese Gleichung wird durch den Factor $\frac{1}{p^2}$ integrabel. Man erhält durch denselben

$$dp = \frac{p dx - x dp}{p^2},$$

es ist daher

$$p = \frac{x}{p} + C.$$

Hieraus folgt:

$$p = \frac{C}{2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} + x}.$$

Es ist daher:

$$dy = \left(\frac{C}{2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} + x} \right) dx,$$

folglich

$$y = \frac{C}{2} x \pm \frac{2}{3} \left(\frac{C^2}{4} + x \right)^{\frac{3}{2}} + C_1,$$

daher:

$$\left(y - \frac{C}{2} x - C_1 \right)^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{C^2}{4} + x \right)^3.$$

149) Soll endlich das Integral einer Gleichung von der Form

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

bestimmt werden, so ist auch hier darauf zu achten diese Gleichung zunächst in die Form der Differentialgleichungen des ersten Grades zu bringen. Dies kann immer geschehen. Denn

setzt man $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, so erhält man

$$f\left(y, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

Da aber $dx = \frac{dy}{p}$, so hat man auch

$$f\left(y, p, \frac{pdp}{dy}\right) = 0.$$

Durch eine erste Integration erhält man eine Gleichung zwischen y und p , d. h. man erhält im Allgemeinen eine Gleichung von der Form

$$F(y, p, C) = 0,$$

oder:

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, C\right) = 0,$$

aus welcher durch eine zweite Integration das gesuchte Integral erhalten wird.

Beispiel.

Man soll das Integral der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + yb = 0$$

bestimmen.

Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, so erhält man:

$$\frac{dp}{dx} + ap + yb = 0.$$

Da $dx = \frac{dy}{p}$ ist, so geht diese Gleichung in folgende homogene Differentialgleichung über

$$pdp + apdy + bydy = 0.$$

Setzt man hierin $p = yz$, so wird die Separation der Veränderlichen möglich, und man erhält:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{zdz}{z^2 + az + b},$$

es ist daher:

$$1) \lg y = -\int \frac{zdz}{z^2 + az + b}.$$

Aus den Gleichungen $p = yz$ und $p = \frac{dy}{dx}$ folgt

$$dx = \frac{1}{z} \cdot \frac{dy}{y},$$

es ist daher:

$$dx = -\frac{dz}{z^2 + az + b},$$

folglich:

$$2) x = -\int \frac{dz}{z^2 + az + b}.$$

Führt man die in (1) und (2) angezeigten Integrationen aus, und eliminirt man hierauf z , so erhält man eine Gleichung zwischen x und y mit zwei willkürlichen Constanten, welche das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung ist.

Bei der Integration der Gleichungen (1) und (2) sind zwei Fälle zu unterscheiden. Es ist das Trinomium $z^2 + az + b$ entweder das Produkt zweier reeller Factoren, oder es ist das Produkt zweier imaginärer Factoren.

Ist das Erste der Fall, so kann man im allgemeinen setzen:

$$z^2 + az + b = (z + \alpha)(z + \beta).$$

In diesem Falle wird das Integral am kürzesten auf folgende Weise genommen. Es ist:

$$\frac{dy}{y} = - \frac{z dz}{(z + \alpha)(z + \beta)}, \text{ und } dx = - \frac{dz}{(z + \alpha)(z + \beta)},$$

folglich

$$\frac{dy}{y} + \alpha dx = - \frac{dz}{z + \beta},$$

und

$$\frac{dy}{y} + \beta dx = - \frac{dz}{z + \alpha}.$$

Durch Integration dieser Gleichungen erhält man:

$$\lg y + \alpha x = - \lg(z + \beta) + \lg C,$$

$$\lg y + \beta x = - \lg(z + \alpha) + \lg C_1.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$z + \beta = \frac{C}{y} e^{-\alpha x},$$

$$z + \alpha = \frac{C_1}{y} e^{-\beta x}.$$

Eliminirt man hieraus z , so findet man das vollständige Integral:

$$3) \quad y = \frac{C e^{-\alpha x} - C_1 e^{-\beta x}}{\beta - \alpha}.$$

Für den Fall, dass $z^2 + az + b$ das Produkt zweier imaginärer Factoren ist, werden α und β imaginäre Grössen. Es ist nämlich

$$(z^2 + az + b) = \left(z + \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right) \left(z + \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right),$$

daher:

$$\alpha = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \quad \beta = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

es werden also α und β imaginär, wenn $\frac{a^2}{4} < b$ ist. Man kann in diesem Falle setzen

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = \gamma \sqrt{-1}.$$

Es wird hierdurch

$$\alpha = \frac{a}{2} + \gamma \sqrt{-1}, \beta = \frac{a}{2} - \gamma \sqrt{-1}.$$

Die Gleichung (3) geht hierdurch in folgende über:

$$y = \frac{C e^{-\gamma x \sqrt{-1}} - C_1 e^{\gamma x \sqrt{-1}}}{-2\gamma \sqrt{-1}} \cdot e^{-\frac{a}{2} x}.$$

Es ist aber

$$e^{-\gamma x \sqrt{-1}} = \cos \gamma x - \sqrt{-1} \sin \gamma x,$$

$$e^{\gamma x \sqrt{-1}} = \cos \gamma x + \sqrt{-1} \sin \gamma x.$$

Hierdurch wird

$$y = \left(\frac{C_1 - C}{2\gamma \sqrt{-1}} \cos \gamma x + \frac{C_1 + C}{2\gamma} \sin \gamma x \right) e^{-\frac{a}{2} x}.$$

Durch Aenderung der Constanten erhält man daher für Das gesuchte Integral

$$4) \quad y = \left(A \cos \gamma x + B \sin \gamma x \right) e^{-\frac{a}{2} x}.$$

150) Von den in §. 144 aufgestellten Differentialgleichungen, die als specielle Fälle der Gleichung

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

bezeichnet wurden, ist nur noch die Untersuchung des Falles

$$f\left(x, y, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

übrig. Doch kann weder von dieser Gleichung noch von der Gleichung $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ behauptet werden, dass es allgemein möglich sei, das Integral derselben zu bestimmen, oder sie durch Substitution oder durch irgend ein anderes Mittel auch nur auf die Form der Differentialgleichungen des ersten Grades zu bringen. Es können aber specielle Fälle bezeichnet werden, in welchen dies möglich wird. Es umfassen dieselben 1tens die homogenen, und 2tens die linearen Differentialgleichungen.

151) Integration der homogenen Differentialgleichungen des zweiten Grades. Eine Differentialgleichung des zweiten Grades heisst homogen, wenn alle Glieder der Gleichung dieselbe Anzahl von Dimensionen besitzen, wobei jedoch nicht allein die Veränderlichen x und y , sondern auch dx , dy und d^2y als Grössen von einer Dimension betrachtet werden. So ist z. B. $x^3d^2y = (ydx - xdy)^2$ eine homogene Differentialgleichung.

Setzt man also $\frac{dy}{dx} = p$, so ist p eine Grösse, deren Dimension Null ist, und setzt man $\frac{d^2y}{dx^2} = q$, so ist die Dimension von q gleich -1 .

Gesetzt nun es sei

$$f(x, y, p, q) = 0$$

eine homogene Differentialgleichung. Setzt man in derselben $y = x \cdot z$, und $q = \frac{u}{x}$, so wird x in allen Gliedern der Gleichung mit einem gleichen Exponenten auftreten, es kann daher eben diese Potenz von x durch Division entfernt werden, und es wird nur eine Gleichung zwischen z , u und p übrig bleiben, so dass man erhält

$$1) \quad F(z, u, p) = 0.$$

Da $y = zx$, so ist $dy = zdx + xdz$. Es ist aber $dy = pdx$, daher

$$pdx = zdx + xdz,$$

folglich:

$$2) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{p-z}.$$

Ferner ist $q = \frac{dp}{dx}$, und $q = \frac{u}{x}$, daher

$$3) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dp}{u}.$$

Aus (2) und (3) folgt

$$4) \quad \frac{dz}{p-z} = \frac{dp}{u},$$

und aus (1) folgt

$$u = \varphi(z, p).$$

Die Gleichung (4) geht hierdurch in folgende über:

$$5) \quad \frac{dz}{p-z} = \frac{dp}{\varphi(z, p)},$$

d. h. in die Form der Differentialgleichungen des ersten Grades, deren Integral nach den früher aufgestellten Regeln zu bestimmen ist. Man wird hieraus finden

$$p = \psi(z, a),$$

wo a die unbestimmte Constante ist. Führt man hierin die Werthe von p und z wieder ein, so erhält man:

$$dy = \psi\left(\frac{y}{x}, a\right) dx.$$

Das Integral dieser Gleichung ist zugleich das vollständige Integral der vorgelegten homogenen Differentialgleichung.

Man sieht, dass die Integration einer homogenen Differentialgleichung des zweiten Grades durch passende Substitutionen sich immer auf die Integration einer Differentialgleichung des ersten Grades zurückführen lässt. Wenn es nicht gelingen sollte, das Integral der Gleichung des ersten Grades zu bestimmen, so nützt freilich dieses Verfahren nichts. Es zeigt aber jedenfalls, dass die zusammengesetztere Aufgabe auf eine einfachere zurückgeführt werden kann, und dies ist der Punkt, auf den es wesentlich in allen Entwicklungen der Integralrechnung ankömmt.

Beispiel.

Es wird das Integral der homogenen Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} x = \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}$$

gesucht.

Man setze $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = q$. Es wird hierdurch

$$q x = p - \frac{y}{x}.$$

Setzt man $y = xz$, $q = \frac{u}{x}$, so erhält man:

$$u = p - z.$$

Nach der Gleichung (4) ist:

$$\frac{dz}{p-z} = \frac{dp}{u}.$$

Da aber $u = p - z$, so hat man

$$\frac{dz}{p-z} = \frac{dp}{p-z},$$

es ist daher:

$$p = z + C,$$

folglich auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + C.$$

Hieraus erhält man:

$$x dy - y dx = C x dx.$$

Der integrierende Factor dieser Gleichung ist $\frac{1}{x^2}$. Man erhält durch denselben

$$\frac{x dy - y dx}{x^2} = \frac{C dx}{x}.$$

Es ist daher:

$$\frac{y}{x} = C \lg x + C_1,$$

wo C und C_1 die willkürlichen Constanten sind.

152) Integration der linearen Differentialgleichungen. Unter einer linearen Differentialgleichung versteht man eine solche, in welcher die abhängige Veränderliche und die Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, u. s. w., nur in der ersten Potenz und nicht mit einander multiplicirt vorkommen. Die allgemeinste Form solcher Gleichungen ist

$$184) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + Q \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + S \cdot y = X,$$

wo $P, Q, \dots, S, X$ irgend welche Functionen von x sind.

Man unterscheidet lineare Differentialgleichungen der 1ten, 2ten Ordnung u. s. w., je nachdem sie nur den ersten Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, oder den zweiten $\frac{d^2y}{dx^2}$, u. s. w. enthalten.

Die Integration der linearen Differentialgleichungen des ersten Grades wurde schon in §. 121 gelehrt.

Die allgemeinste Form einer linearen Differentialgleichung des zweiten Grades ist:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Q y = X,$$

oder:

$$185) \quad d^2y + Pdx dy + Qy dx^2 = Xdx^2.$$

Ein specieller Fall, der in diesem allgemeineren enthalten ist, und der hier zuerst erörtert werden soll, ist jener, in welchem die allgemeine Gleichung keinen zweiten Theil enthält, d. h. in welchem X Null ist.

Die zu integrirende Gleichung ist hiernach:

$$186) \quad d^2y + Pdx dy + Qy dx^2 = 0.$$

Setzt man hierin $y=e^z$, daher:

$$\text{und} \quad dy = e^z dx,$$

$$d^2y = e^z dz^2 + e^z d^2z,$$

so erhält man:

$$e^z dz^2 + e^z d^2z + Pe^z dz dx + Qe^z dx^2 = 0.$$

Hier fällt e^z als gemeinschaftlicher Factor heraus, und man erhält, wenn man zugleich durch dx^2 dividirt

$$\frac{dz^2}{dx^2} + \frac{d^2z}{dx^2} + P \frac{dz}{dx} + Q = 0.$$

Setzt man hierin $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, so hat man:

$$p^2 + \frac{dp}{dx} + Pp + Q = 0.$$

Hierdurch ist die vorgelegte Differentialgleichung des zweiten Grades auf die Form der Differentialgleichungen des ersten Grades zurückgebracht, deren Integral nach den früheren Regeln zu bestimmen ist. Man wird hiernach erhalten

$$p = f(x, C),$$

wo C eine willkürliche Constante ist.

Da nun $dz = p dx$, so hat man

$$z = \int f(x, C) dx + C_1.$$

Es ist aber $y=e^z$, daher

$$187) \quad y = e^{\int f(x, C) dx + C_1}.$$

Es ist nun ferner das Integral der allgemeineren Gleichung

$$d^2y + Pdx dy + Qy dx^2 = Xdx^2$$

aufzusuchen.

Setzt man in derselben $y=uz$, daher

$$dy = u dz + z du,$$

und

$$d^2y = u d^2z + 2 du dz + z d^2u,$$

so erhält man:

$$u(d^2z + P dx dz + Q z dx^2) + 2 du dz + z d^2u + P z du dx = X dx^2.$$

Da man über eine der Grössen u und z nach Willkür verfügen kann, so kann man sie so wählen, dass

$$\alpha) \quad d^2z + P dx dz + Q z dx^2 = 0$$

wird. In diesem Falle wird daher auch

$$\beta) \quad 2 du dz + z d^2u + P z du dx = X dx^2.$$

Die Gleichung (α) stimmt in ihrer Form mit der Gleichung No. 186 überein, und ist daher wie jene integrabel. Man erhält nämlich

$$z = e^{\int p dx},$$

wo p den oben bezeichneten Werth ausdrückt.

Führt man diesen Werth von z in (β) ein, so erhält man:

$$2 du e^{\int p dx} p dx + e^{\int p dx} (d^2u + P du dx) = X dx^2.$$

Setzt man $\frac{du}{dx} = p_1$, $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dp_1}{dx}$, so findet man:

$$dp_1 + (P + 2p) p_1 dx = X e^{-\int p dx} dx,$$

welches eine lineare Differentialgleichung des ersten Grades ist, und daher nach §. 121 integrirt werden kann. Man findet hiernach p_1 gleich einer Function von x , oder $p_1 = \varphi(x)$. Da aber $du = p_1 dx$, so hat man:

$$u = \int p_1 dx.$$

Es war oben $y = uz$ gesetzt, das verlangte Integral ist daher:

$$188) \quad y = e^{\int p dx} \int p_1 dx.$$

153) 1te Aufgabe.

Man soll das Integral der Gleichung

$$d^2y + a dy dx + b y dx^2 = 0$$

bestimmen.

Diese Gleichung ist eine lineare Differentialgleichung ohne zweiten Theil, und stimmt daher mit der Gleichung No. 186 überein. Man hat in jener nur $P=a$, $Q=b$ zu setzen.

Setzt man wie im vorhergehenden §.

$$y = e^z \text{ und } \frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dp}{dx},$$

so findet man:

$$p^2 + \frac{dp}{dx} + ap + b = 0,$$

es ist daher:

$$dx = - \frac{dp}{p^2 + ap + b}.$$

Man kann aber setzen:

$$p^2 + ap + b = (p + m)(p + n).$$

Hierdurch wird:

$$x = - \int \frac{dp}{(p+m)(p+n)} \\ = \frac{1}{m-n} \lg \left(\frac{p+m}{p+n} c \right).$$

Es ist daher:

$$\alpha) \quad p = \frac{-ne^{mx} + mce^{nx}}{e^{mx} - ce^{nx}}.$$

Es ist aber $dz = p dx$, daher:

$$z = \int \frac{-ne^{mx} + mce^{nx}}{e^{mx} - ce^{nx}} dx.$$

Statt diese Integration weiter zu verfolgen, ist es bequemer eine Gleichung zwischen y und p aufzusuchen, und darauf p aus dieser Gleichung und der Gleichung (α) zu eliminiren.

Es ist nämlich:

$$p dx = - \frac{p dp}{(p+m)(p+n)},$$

folglich:

$$\int p dx = - \int \frac{p dp}{(p+m)(p+n)} \\ = \frac{m}{n-m} \lg(p+m) - \frac{n}{n-m} \lg(p+n) + \lg c_1.$$

Es ist daher:

$$e^{\int p dx} = (p+m)^{\frac{m}{n-m}} (p+n)^{-\frac{n}{n-m}} C_1.$$

Da nun $z = \int p dx$, und $y = e^z$, so ist

$$\beta) \quad y = (p+m)^{\frac{m}{n-m}} (p+n)^{-\frac{n}{n-m}} C_1.$$

Eliminirt man p aus (α) und (β) , so erhält man nach einer Aenderung der Constanten C und C_1

$$189) \quad y = Ce^{-mx} + C_1 e^{-nx}.$$

Für den Fall dass m und n imaginär werden erhält man aus den schon in § 149 entwickelten Gründen Sinus und Cosinus statt der imaginären Exponentialgrössen.

2te Aufgabe.

Man soll das Integral der Gleichung:

$$d^2y + ady dx + by dx^2 = X dx^2$$

bestimmen.

Dies ist eine lineare Differentialgleichung, mit einem zweiten Theil, für welche ebenfalls im vorhergehenden § das bei der Integration derselben einzuschlagende Verfahren angegeben wurde.

Setzt man $y = uz$, so erhält man, da über eine der Grössen x, z nach Willkür verfügt werden kann, folgende zwei Gleichungen:

$$d^2z + adx dz + bzdz^2 = 0$$

und

$$2du dz + zd^2u + az du dx = X dx^2.$$

Das Integral der ersten dieser Gleichung wird wie in der vorhergehenden Aufgabe bestimmt. Man erhält hierdurch z gleich einer Function von x . Setzt man in der zweiten Gleichung

$\frac{du}{dx} = p_1$, $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dp_1}{dy}$, so erhält dieselbe die Form einer linearen Differentialgleichung des ersten Grades, und man erhält:

$$p_1 = e^{-ax - 2 \lg z} \int \frac{X}{z} \cdot e^{ax + 2 \lg z}.$$

Es wird daher:

$$u = \int \left(\frac{e^{-ax}}{z^2} \int X z e^{ax} \right) dx,$$

folglich

$$y = z \int \left(\frac{e^{-ax}}{z^2} \int X z e^{ax} \right) dx.$$

Es sind hiermit nur die Operationen angezeigt, die zur Herstellung des Integrals auszuführen sind. Die wirkliche Ausführung ist möglich, aber nicht ohne Weitläufigkeit. Es giebt

aber einen andern kürzeren Weg, der überdiess eine neue Integrationsmethode einschliesst, und schon von dieser Seite her eine besondere Beachtung in Anspruch nimmt. Die Entwicklung dieser Methode ist der Gegenstand der folgenden §§.

154) Es sei zunächst das Integral der linearen Differentialgleichung der n ten Ordnung

$$190) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + A_n y = 0$$

zu bestimmen, wo $A_1, A_2, \dots, A_n$ constante Grössen sind. Das vollständige Integral dieser Gleichung muss n neue willkürliche Constanten enthalten, und zugleich der vorgelegten Gleichung genügen. Es kömmt daher nur darauf an eine Gleichung zwischen x und y aufzufinden, die n neue Constanten besitzt, und die, wenn man aus ihr die Werthe von $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ entwickelt, und in der vorgelegten Differentialgleichung einführt derselben Genüge leisten.

Setzt man $y = e^{\alpha x}$, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \alpha e^{\alpha x}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha^2 e^{\alpha x}, \quad \dots, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \alpha^n e^{\alpha x}.$$

Führt man diese Werthe in der Gleichung No. 190 ein, so erhält man, da $e^{\alpha x}$ als gemeinschaftlicher Factor herausfällt,

$$(m) \quad \alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + A_2 \alpha^{n-2} + \dots + A_n = 0$$

Da es im Allgemeinen n Werthe von α giebt, welche dieser Gleichung genügen, so giebt es auch n Gleichungen von der Form $y = e^{\alpha x}$ oder auch von der Form $y = C e^{\alpha x}$, wo C eine willkürliche Constante bezeichnet, welche der vorgelegten Differentialgleichung genügen, und daher als partikuläre Integrale derselben zu betrachten sind.

Bezeichnen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ die n Wurzeln der Gleichung (m), und bezeichnen ferner $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ n willkürliche Constante, so sind:

$y = C_1 e^{\alpha_1 x}, y = C_2 e^{\alpha_2 x}, \dots, y = C_n e^{\alpha_n x}$
die n partikuläre Integrale, welche der gegebenen Differential-

gleichung genügen. Es ist an sich klar, dass ebenso die Gleichung $y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$, und endlich die Gleichung

$$191) \quad y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + C_3 e^{\alpha_3 x} + \dots + C_n e^{\alpha_n x}$$

der zu integrierenden Gleichung genügen werde. Die Gleichung *No. 191* ist aber zugleich das vollständige Integral von *No. 190*, denn sie genügt nicht allein dieser Differentialgleichung, sie enthält zugleich n willkürliche Constanten, die in *No. 190* nicht enthalten sind.

Wenn welche der Wurzeln der Gleichung (m) imaginär sind, oder wenn auch alle zugleich imaginär werden, so bleibt doch immer dieselbe Methode zur Herstellung des Integrals gültig. Es werden in diesem Falle in *No. 191* imaginäre Exponentialgrößen auftreten, die indess leicht durch Kreisfunctionen in einer reellen Form sich ausdrücken lassen. Man hat nur festzuhalten, dass die imaginären Wurzeln stets paarweise auftreten, und im Allgemeinen die Form $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta \sqrt{-1}$ besitzen. Wenn etwa α_1 und α_2 in einem speciellen Falle in den oben bezeichneten imaginären Formen auftreten sollten, so hat man:

$$C_1 e^{(\alpha + \beta \sqrt{-1})x} + C_2 e^{(\alpha - \beta \sqrt{-1})x}$$

oder:

$$e^{\alpha x} (C_1 e^{\beta x \sqrt{-1}} + C_2 e^{-\beta x \sqrt{-1}})$$

Es ist aber:

$$e^{\beta x \sqrt{-1}} = \cos \beta x + \sqrt{-1} \sin \beta x,$$

$$e^{-\beta x \sqrt{-1}} = \cos \beta x - \sqrt{-1} \sin \beta x,$$

folglich:

$$e^{\alpha x} (C_1 e^{\beta x \sqrt{-1}} + C_2 e^{-\beta x \sqrt{-1}})$$

$$= e^{\alpha x} [(C_1 + C_2) \cos \beta x + (C_1 - C_2) \sqrt{-1} \sin \beta x].$$

Man erhält daher nach Aenderung der Constanten:

$$C_1 e^{(\alpha + \beta \sqrt{-1})x} + C_2 e^{(\alpha - \beta \sqrt{-1})x} = e^{\alpha x} (B_1 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x)$$

folglich:

$$y = e^{\alpha x} (B_1 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x) + C_3 e^{\alpha_3 x} + \dots + C_n e^{\alpha_n x}.$$

Es ist endlich noch das Integral der Gleichung *No. 190* für den Fall zu bestimmen, dass einige oder alle Wurzeln der Gleichung einander gleich werden.

Gesetzt in einem speciellen Falle werde $\alpha_1 = \alpha_2$. Hierdurch geht die Gleichung *No. 191* in folgende über:

$$y = (C_1 + C_2)e^{\alpha_1 x} + C_3 e^{\alpha_3 x} + \dots + C_n e^{\alpha_n x}.$$

Da $C_1 + C_2$ nur als eine willkürliche Constante betrachtet werden können, so ist die vorstehende Gleichung nur als ein partikulares Integrale von *No. 190* zu betrachten.

Setzt man $\alpha_2 = \alpha_1 + h$, so kann der Fall $\alpha_2 = \alpha_1$ auch so bezeichnet werden, dass er eintrete, wenn h verschwindend klein wird. Es ist nun

$$C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{(\alpha_1 + h)x} = e^{\alpha_1 x} (C_1 + C_2 e^{hx}),$$

man erhält daher, wenn man beachtet dass

$$e^{hx} = 1 + hx + \frac{h^2 x^2}{1.2} + \frac{h^3 x^3}{1.2.3} + \dots$$

ist,

$$C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{(\alpha_1 + h)x} = e^{\alpha_1 x} \left(C_1 + C_2 + C_2 hx + C_2 \frac{h^2 x^2}{1.2} + \dots \right).$$

Wird h verschwindend klein, so werden die mit $h^2, h^3 \dots$ verbundenen Glieder verschwindend klein gegen das Glied $C_2 hx$. Das Produkt $C_2 h$ kann aber als eine endliche Grösse bezeichnet werden, denn da C_2 eine willkürliche Constante ist, so kann sie jedenfalls so gewählt werden, dass $C_2 h$ einen endlichen Werth erhält. Ebenso kann $C_1 + C_2$, wenn auch C_2 unendlich gross wird, als eine endliche Grösse bezeichnet werden. Setzt man hiernach $C_1 + C_2 = B_1$, $C_2 h = B_2$, so erhält man für den Fall, dass h verschwindend klein wird:

$$C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{(\alpha_1 + h)x} = e^{\alpha_1 x} (B_1 + B_2 x).$$

In diesem Falle wird aber $\alpha_2 = \alpha_1$. Das Integral von *No. 190* ist daher unter der Voraussetzung, dass die Wurzeln α_1 und α_2 der Gleichung (m) einander gleich werden,

$$y = e^{\alpha_1 x} (B_1 + B_2 x) + C_3 e^{\alpha_3 x} + \dots + C_n e^{\alpha_n x}.$$

Ist ferner $\alpha_3 = \alpha_1$, so setze man zunächst $\alpha_3 = \alpha_1 + h$. Man erhält hierdurch:

$$e^{\alpha_1 x}(B_1 + B_2 x) + C_3 e^{\alpha_3 x} = e^{\alpha_1 x}(B_1 + B_2 x) + C_3 e^{(\alpha_1 + h)x} \\ = e^{\alpha_1 x} \left(B_1 + B_2 x + C_3 + C_3 h x + C_3 \frac{h^2 x^2}{1 \cdot 2} + C_3 \frac{h^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right)$$

$$= e^{\alpha_1 x} \left((B_1 + C_3) + (B_2 + C_3 h)x + \frac{C_3 h^2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{C_3 h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \right).$$

Wird h verschwindend klein, so wird $\alpha_3 = \alpha_1$, und die mit h^3 und mit höheren Potenzen von h versehenen Glieder verschwinden gegen h^2 . Es wird daher

$$e^{\alpha_1 x}(B_1 + B_2 x) + e^{(\alpha_1 + h)x} = e^{\alpha_1 x} \left((B_1 + C_3) + (B_2 + C_3 h)x + \frac{C_3 h^2}{1 \cdot 2} x^2 \right).$$

Ändert man die Constanten so, dass

$$B_1 + C_3 = D_1,$$

$$B_2 + C_3 h = D_2,$$

$$\frac{C_3 h^2}{1 \cdot 2} = D_3$$

wird, so erhält das Integral der Gleichung *No. 190*, für den Fall dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ wird, folgende Form:

$$y = e^{\alpha_1 x} (D_1 + D_2 x + D_3 x^2) + C_4 e^{\alpha_4 x} + \dots + C_n e^{\alpha_n x}.$$

Man kann hieraus schliessen, dass wenn alle Wurzeln der Gleichung (m) einander gleich werden, so werde das vollständige Integral von *No. 190* durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$y = e^{\alpha_1 x} (N_1 + N_2 x + N_3 x^2 + \dots + N_n x^{n-1}).$$

155) Es handelt sich nun weiter um die Herstellung des Integrals der allgemeineren linearen Differentialgleichung.

$$192) \frac{d^n x}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + Q \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + y S = 0,$$

in welcher $P, Q, \dots S$ irgend welche Functionen von x bezeichnen.

Es ist klar, dass auch hier, wenn es gelingen sollte n partikuläre Integrale herzustellen, die Summe dieser n Integrale, nachdem ein jedes zuvor mit einer willkürlichen Constanten multiplicirt ist, das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung darstellen werde. Gesetzt also es seien

$$y = C_1 Y_1, y = C_2 Y_2, \dots y = C_n Y_n$$

die n partikuläre Integrale der Gleichung *No. 192*, so ist das vollständige Integral derselben:

193) $y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 + \dots + C_n Y_n$,
 wo $C_1, C_2, \dots$ willkürliche Constanten, und $Y_1, Y_2 \dots$ Functionen von x bezeichnen.

Man kann beweisen, dass wenn es gelingen sollte das Integral der Gleichung *No. 192* zu bestimmen, dass dann auch immer das Integral der Gleichung:

$$194) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + Q \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + y S = X$$

bestimmt werden könne, d. h. also eine lineare Differentialgleichung mit einem zweiten Theile kann immer auf eine lineare Differentialgleichung ohne zweiten Theil zurückgebracht werden.

Die Gleichung *No. 193* sei als Integral der Gleichung *No. 192* gefunden. Denkt man sich die Grössen $C_1, C_2, \dots C_n$ variabel und als Functionen von x , so erhält man durch Differentiation der Gleichung *No. 193*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = & C_1 \frac{dY_1}{dx} + C_2 \frac{dY_2}{dx} + C_3 \frac{dY_3}{dx} + \dots + C_n \frac{dY_n}{dx} \\ & + \frac{dC_1}{dx} \cdot Y_1 + \frac{dC_2}{dx} \cdot Y_2 + \frac{dC_3}{dx} \cdot Y_3 + \dots + \frac{dC_n}{dx} \cdot Y_n. \end{aligned}$$

Da man über die Functionen von x , welche durch $C_1, C_2, C_3 \dots$ ausgedrückt sind, frei verfügen kann, so kann man dieselben auch so bestimmen, dass sie der Gleichung

$$\frac{dC_1}{dx} Y_1 + \frac{dC_2}{dx} Y_2 + \frac{dC_3}{dx} Y_3 + \dots + \frac{dC_n}{dx} Y_n = 0$$

genüge leisten. Differentirt man unter dieser Voraussetzung von Neuem, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} = & C_1 \frac{d^2 Y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2 Y_2}{dx^2} + C_3 \frac{d^2 Y_3}{dx^2} + \dots + C_n \frac{d^2 Y_n}{dx^2} \\ & + \frac{dC_1}{dx} \cdot \frac{dY_1}{dx} + \frac{dC_2}{dx} \cdot \frac{dY_2}{dx} + \frac{dC_3}{dx} \cdot \frac{dY_3}{dx} + \dots + \frac{dC_n}{dx} \cdot \frac{dY_n}{dx}. \end{aligned}$$

Bestimmt man weiter $C_1, C_2, C_3 \dots$ so, dass auch hier die zweite Linie Null wird, und differentirt man von Neuem, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y}{dx^3} = & C_1 \frac{d^3 Y_1}{dx^3} + C_2 \frac{d^3 Y_2}{dx^3} + C_3 \frac{d^3 Y_3}{dx^3} + \dots + C_n \frac{d^3 Y_n}{dx^3} \\ & + \frac{dC_1}{dx} \cdot \frac{d^2 Y_1}{dx^2} + \frac{dC_2}{dx} \cdot \frac{d^2 Y_2}{dx^2} + \frac{dC_3}{dx} \cdot \frac{d^2 Y_3}{dx^2} + \dots + \frac{dC_n}{dx} \cdot \frac{d^2 Y_n}{dx^2}. \end{aligned}$$

Führt man so fort, so findet man endlich:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = C_1 \frac{d^n Y_1}{dx^n} + C_2 \frac{d^n Y_2}{dx^n} + C_3 \frac{d^n Y_3}{dx^n} + \dots + C_n \frac{d^n Y_n}{dx^n} \\ + \frac{dC_1}{dx} \cdot \frac{d^{n-1} Y_1}{dx^{n-1}} + \frac{dC_2}{dx} \cdot \frac{d^{n-1} Y_2}{dx^{n-1}} + \frac{dC_3}{dx} \cdot \frac{d^{n-1} Y_3}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{dC_n}{dx} \cdot \frac{d^{n-1} Y_n}{dx^{n-1}}.$$

Setzt man die zweite Linie dieser Gleichung gleich X , so erhält man wieder eine Gleichung, in welcher die Grössen $C_1, C_2, C_3 \dots C_n$ enthalten sind. Im Ganzen hat man daher zur Bestimmung der Grössen $C_1, C_2, C_3 \dots C_n$ folgende n Gleichungen:

$$195) \begin{cases} \frac{dC_1}{dx} Y_1 + \frac{dC_2}{dx} Y_2 + \frac{dC_3}{dx} Y_3 + \dots + \frac{dC_n}{dx} Y_n = 0, \\ \frac{dC_1}{dx} \cdot \frac{dY_1}{dx} + \frac{dC_2}{dx} \cdot \frac{dY_2}{dx} + \frac{dC_3}{dx} \cdot \frac{dY_3}{dx} + \dots + \frac{dC_n}{dx} \cdot \frac{dY_n}{dx} = 0, \\ \frac{dC_1}{dx} \cdot \frac{d^2 Y_1}{dx^2} + \frac{dC_2}{dx} \cdot \frac{d^2 Y_2}{dx^2} + \frac{dC_3}{dx} \cdot \frac{d^2 Y_3}{dx^2} + \dots + \frac{dC_n}{dx} \cdot \frac{d^2 Y_n}{dx^2} = 0, \\ \frac{dC_1}{dx} \cdot \frac{d^{n-1} Y_1}{dx^{n-1}} + \frac{dC_2}{dx} \cdot \frac{d^{n-1} Y_2}{dx^{n-1}} + \frac{dC_3}{dx} \cdot \frac{d^{n-1} Y_3}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{dC_n}{dx} \cdot \frac{d^{n-1} Y_n}{dx^{n-1}} = X. \end{cases}$$

Die Voraussetzung, von welcher ausgegangen wurde, bestand darin, dass die Gleichung *No. 193* das vollständige Integral der Gleichung *No. 192* sei, d. h. also der Gleichung *No. 192* geschieht Genüge, wenn man in derselben die Werthe von y , und der successiven Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$, welche sich aus *No. 193* ableiten lassen, einführt. Die Grössen $C_1, C_2, C_3 \dots C_n$ treten hierbei als constante Grössen auf. Betrachtet man nun $C_1, C_2, C_3 \dots C_n$ als variable Grössen, und zwar als Functionen von x , jedoch so, dass sie den Gleichungen *No. 195* genügen, so kann die Einführung der Werthe von $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ in *No. 192* eben diese Gleichung nicht erfüllen, denn es tritt nun im Vergleich mit dem früheren Falle noch die Grösse X hinzu. Eben hieraus geht aber hervor, dass die zuletzt erwähnten Werthe von $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ der Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + Q \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + y S = X$$

genügen werden. Das vollständige Integral dieser Gleichung wird demnach erhalten, wenn man die Werthe von $C_1, C_2, C_3 \dots C_n$, die in *No. 193* vorkommen, als Functionen von x betrachtet, und so bestimmt, wie sie aus den Gleichungen *No. 195* hervorgehen. Gesetzt man finde aus *No. 195*

$$\frac{dC_1}{dx} = X_1, \quad \frac{dC_2}{dx} = X_2, \quad \dots \quad \frac{dC_n}{dx} = X_n,$$

so ist:

$$C_1 = \int X_1 dx + c_1, \quad C_2 = \int X_2 dx + c_2, \quad \dots \quad C_n = \int X_n dx.$$

Führt man diese Werthe in *No. 193* ein, so erhält man das Integral von *No. 194*, nämlich:

$$196) \quad y = Y_1 \left(\int X_1 dx + c_1 \right) + Y_2 \left(\int X_2 dx + c_2 \right) + \dots + Y_n \left(\int X_n dx + c_n \right).$$

Da die Werthe von $\int X_1 dx, \int X_2 dx, \int X_3 dx, \dots$ wie die Gleichungen *No. 195* zeigen, von $Y_1, Y_2, Y_3 \dots Y_n$ d. h. also von der Kenntniss der partikularen Integrale der linearen Differentialgleichung *No. 192* abhängen, so ist hiermit die oben aufgestellte Behauptung erwiesen, dass das Integral einer linearen Differentialgleichung mit einem zweiten Theile immer auf das Integral einer linearen Differentialgleichung ohne zweiten Theil zurückgebracht werden könne.

156) Die eben entwickelte Methode der Integration hat man Lagrange zu verdanken. Um die Anwendung derselben in einem speciellen Falle zu zeigen, soll das Integral der schon früher vorgelegten Gleichung:

$$d^2y + a dy dx + b y dx^2 = X dx^2,$$

oder der Gleichung:

$$197) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = X$$

gesucht werden.

Das Integral von

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$$

ist nach §. 154

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x},$$

wo α_1 und α_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$$

sind.

Man erhält daher für das Integral der Gleichung No. 197 ebenfalls

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x},$$

wo jedoch C_1 und C_2 aus den Gleichungen:

$$\frac{dC_1}{dx} e^{\alpha_1 x} + \frac{dC_2}{dx} e^{\alpha_2 x} = 0,$$

$$\frac{dC_1}{dx} \alpha_1 e^{\alpha_1 x} + \frac{dC_2}{dx} \alpha_2 e^{\alpha_2 x} = X$$

zu bestimmen sind. Man erhält aus denselben

$$\frac{dC_1}{dx} = \frac{X e^{-\alpha_1 x}}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

$$\frac{dC_2}{dx} = \frac{X e^{-\alpha_2 x}}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

$$C_1 = \int \frac{X e^{-\alpha_1 x} dx}{\alpha_1 - \alpha_2} + c_1,$$

$$C_2 = \int \frac{X e^{-\alpha_2 x} dx}{\alpha_2 - \alpha_1} + c_2.$$

Das vollständige Integral von No. 197 ist daher:

$$198) y = e^{\alpha_1 x} \left(\int \frac{X e^{-\alpha_1 x} dx}{\alpha_1 - \alpha_2} + c_1 \right) + e^{\alpha_2 x} \left(\int \frac{X e^{-\alpha_2 x} dx}{\alpha_2 - \alpha_1} + c_2 \right).$$

Wenn die Wurzeln der Gleichung:

$$a^2 + a a + b = 0$$

imaginär sind, und daher die Form $\alpha + \beta \sqrt{-1}$, $\alpha - \beta \sqrt{-1}$ besitzen, so ist das Integral von

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$$

nach §. 154:

$$y = e^{\alpha x} (B_1 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x).$$

Das Integral von No. 197 ist daher ebenfalls

$$y = e^{\alpha x} (B_1 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x),$$

jedoch sind hier B_1 und B_2 Functionen von x , die aus den Gleichungen:

$$\frac{dB_1}{dx} \cos \beta x + \frac{dB_2}{dx} \sin \beta x = 0,$$

$$\frac{dB_1}{dx} \left(\alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x \right) - \frac{dB_2}{dx} \left(\alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x \right) = X$$

zu bestimmen sind. Man erhält aus diesen Gleichungen:

$$\frac{dB_1}{dx} = -\frac{Xe^{-\alpha x} \sin \beta x}{\beta},$$

$$\frac{dB_2}{dx} = \frac{Xe^{-\alpha x} \cos \beta x}{\beta},$$

daher:

$$B_1 = -\int \frac{Xe^{-\alpha x} \sin \beta x \cdot dx}{\beta} + c_1,$$

$$B_2 = \int \frac{Xe^{-\alpha x} \cos \beta x \cdot dx}{\beta} + c_2.$$

Das Integral von No. 197 ist daher:

$$199) \ y = -e^{\alpha x} \left[\cos \beta x \left(\int \frac{Xe^{-\alpha x} \sin \beta x \cdot dx}{\beta} + c_1 \right) - \sin \beta x \left(\int \frac{Xe^{-\alpha x} \cos \beta x \cdot dx}{\beta} + c_2 \right) \right].$$

Wenn endlich die Wurzeln der Gleichung

$$a^2 + \alpha a + b = 0$$

einander gleich sind, so wird $\alpha_1 = \alpha_2$, und das Integral der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$$

wird nach §. 154:

$$y = e^{\alpha x} (B_1 + B_2 x).$$

Das Integral von

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = X$$

ist daher:

$$y = e^{\alpha x} (B_1 + B_2 x),$$

wo B_1 und B_2 aus den Gleichungen

$$\frac{dB_1}{dx} + \frac{dB_2}{dx} \cdot x = 0,$$

$$\frac{dB_1}{dx} \alpha e^{\alpha x} + \frac{dB_2}{dx} \left(\alpha x e^{\alpha x} + e^{\alpha x} \right) = X$$

zu bestimmen sind. Man erhält aus diesen Gleichungen

$$B_1 = -\int X x e^{-\alpha x} dx + c_1,$$

$$B_2 = \int X e^{-\alpha x} dx + c_2.$$

Das gesuchte Integral ist daher:

$$200) \quad y = e^{ax} \left[-\int Xx e^{-ax} dx + c_1 + \left(\int X e^{-ax} dx + c_2 \right) x \right].$$

157) Es wurde in diesem Abschnitte von der Integration der entwickelten Differentialformel $\frac{d^ny}{dx^n} = f(x)$ ausgegangen. Es kann dieselbe ohne Schwierigkeit ausgeführt werden. Dagegen ist die Integration der Gleichung:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

in der Allgemeinheit, die diese Form besitzt, nicht möglich. Es wurden daher einfachere Fälle und zwar zuerst Differentialgleichungen des zweiten Grades einer besondern Untersuchung unterworfen. Auch von diesen kann, wenn sie in ihrer allgemeinsten Form auftreten, nämlich in der Form:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

das Integral nicht bestimmt werden. Es waren daher näher die speciellen Fälle zu bezeichnen, in welcher die Integration möglich wird. Der Schluss jener Darlegung führte zu den s. g. linearen Differentialgleichungen, die zwar nicht unbedingt integrabel sind, die aber in jenen Fällen, in welchen sie integrabel sind, die früher untersuchten specielleren Fälle einschliessen, und überdiess dadurch eine weit grössere Allgemeinheit als die früher untersuchten Gleichungen besitzen, dass sie nicht allein auf Differentialgleichungen des zweiten Grades beschränkt sind, sondern Differentialgleichungen beliebiger Grade umfassen. Da nun die Integration der Differentialgleichungen des dritten, vierten und höherer Grade nur in den Fällen gelingt, welche in den linearen Differentialgleichungen schon enthalten sind, so ist eine besondere Darlegung der Integration der Gleichungen dritter und höherer Grade überflüssig.

158) Elimination der Veränderlichen aus einem System von Differentialgleichungen. Wenn n Gleichungen mit $n+1$ Veränderlichen gegeben sind, so können bekanntlich $n-1$ Veränderliche eliminirt werden, so dass nur noch eine Gleichung mit zwei Veränderlichen übrig bleibt, in

welcher also die eine der Variablen als die ursprünglich Veränderliche, die andere als die abhängig Veränderliche zu betrachten ist. Wenn ebenso n Differentialgleichungen von der Form

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dv} &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, v) \\ \frac{dx_2}{dv} &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, v) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dv} &= f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, v)\end{aligned}$$

gegeben sind, in welchen n abhängig Veränderliche $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, und eine unabhängig Veränderliche vorkommen, so können auch hier durch ein sogleich näher zu bezeichnendes Verfahren $n-1$ Veränderliche eliminirt werden, so dass nur eine Differentialgleichung zwischen einer der abhängig Veränderlichen und der Veränderlichen v übrig bleibt, von welcher nach den früheren Methoden das Integral zu suchen ist.

Gesetzt es seien zunächst nur zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dv} &= f_1(x_1, x_2, v), \\ \frac{dx_2}{dv} &= f_2(x_1, x_2, v)\end{aligned}$$

mit drei Veränderlichen x_1, x_2, v gegeben. Differentirt man die erste dieser Gleichungen in Hinsicht v , so erhält man:

$$\frac{d^2x_1}{dv^2} = \frac{df_1}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dv} + \frac{df_1}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dv} + \frac{df_1}{dv}.$$

Aus dieser Gleichung und aus den beiden gegebenen können die Grössen x_2 und $\frac{dx_2}{dv}$ eliminirt werden, und man erhält eine

Gleichung zwischen $x_1, \frac{dx_1}{dv}, \frac{d^2x_1}{dv^2}$, d. h. eine Differentialgleichung des zweiten Grades mit nur zwei Veränderlichen.

Es seien ferner drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dv} &= f_1(x_1, x_2, x_3, v), \\ \frac{dx_2}{dv} &= f_2(x_1, x_2, x_3, v), \\ \frac{dx_3}{dv} &= f_3(x_1, x_2, x_3, v)\end{aligned}$$

mit vier Veränderlichen gegeben.

Differentirt man die erste dieser Gleichungen zweimal nach einander in Hinsicht v , so erhält man zwei neue Gleichungen, aus welchen in Verbindung mit den drei gegebenen die Grössen $x_2, x_3, \frac{dx_2}{dv}, \frac{dx_3}{dv}$ eliminirt werden können. Man erhält hierdurch eine Differentialgleichung des dritten Grades, in welcher nur die Veränderlichen x_1, v enthalten sind.

Man erkennt, dass dasselbe Verfahren auf eine beliebige Zahl von Gleichungen sich ausdehnen lasse. Sind n Gleichungen gegeben, so erhält man, wenn eine dieser Gleichungen, etwa die erste, successiv $n - 1$ mal in Hinsicht x differentirt wird, $n - 1$ neue Gleichungen, die mit den n gegebenen hinreichen, um $2n - 2$ Veränderliche zu eliminiren. Es bleibt dann eine Differentialgleichung des n ten Grades mit zwei Veränderlichen übrig, deren Integral nach den früher entwickelten Methoden zu suchen ist.

Beispiel.

Es sind die Gleichungen:

$$\frac{dx}{dv} = y + v,$$

$$\frac{dy}{dv} = x + v$$

gegeben. Es sollen x und y durch solche Functionen von v bestimmt werden, dass sie diesen Gleichungen genügen.

Differentirt man die erste dieser Gleichungen in Hinsicht v , so erhält man

$$\frac{d^2x}{dv^2} = \frac{dy}{dv} + 1.$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung und aus der zweiten $\frac{dy}{dv}$, so findet man:

$$\frac{d^2x}{dv^2} - x = v + 1.$$

Diese Gleichung ist eine lineare Differentialgleichung des zweiten Grades. Ihr Integral ist nach §. 156 zu bestimmen. Man erhält für dasselbe

$$x = C_1 e^v + C_2 e^{-v},$$

wo C_1 und C_2 aus den Gleichungen:

$$\frac{dC_1}{dv} e^v + \frac{dC_2}{dv} e^{-v} = 0,$$

$$\frac{dC_1}{dv} e^v - \frac{dC_2}{dv} e^{-v} = v + 1$$

zu bestimmen sind. Man erhält hieraus:

$$C_1 = \int \frac{v+1}{2} e^{-v} dv = -\frac{1}{2} \left(e^{-v} (v+1) + e^{-v} \right) + c_1,$$

$$C_2 = - \int \frac{v+1}{2} e^v dv = -\frac{1}{2} \left(e^v (v+1) - e^v \right) + c_2.$$

Führt man diese Werthe ein, so erhält man für das gesuchte Integral:

$$x = c_1 e^v + c_2 e^{-v} - (v+1).$$

Da nach der ersten der gegebenen Gleichungen

$$y = \frac{dx}{dv} - v,$$

so erhält man, wenn man den eben gefundenen Werth von x einführt,

$$y = c_1 e^v - c_2 e^{-v} - (v+1).$$

159) Wenn in den gegebenen Differentialgleichungen ausser dem ersten Differentialquotienten einer der abhängig Veränderlichen deren mehrere und überdiess höhere Quotienten vorkommen, so ist das bei der Elimination zu befolgende Verfahren dem eben gelehrtten ähnlich.

Gesetzt etwa es seien die beiden Gleichungen:

$$f_1 \left(v, x, \frac{dx}{dv}, \frac{d^2x}{dv^2}, \dots, \frac{d^m x}{dv^m}, y, \frac{dy}{dv}, \frac{d^2y}{dv^2}, \dots, \frac{d^p y}{dv^p} \right) = 0,$$

$$f_2 \left(v, x, \frac{dx}{dv}, \frac{d^2x}{dv^2}, \dots, \frac{d^n x}{dv^n}, y, \frac{dy}{dv}, \frac{d^2y}{dv^2}, \dots, \frac{d^q y}{dv^q} \right) = 0$$

gegeben, in welchen x, y die von v abhängigen Veränderlichen sind.

Differentirt man die erste dieser Gleichungen n mal in Hinsicht v , und die zweite m mal in Hinsicht v , so erhält man $m+n$ neue Gleichungen, die mit den zwei gegebenen hinreichen, um $m+n+1$ Grössen, nämlich $x, \frac{dx}{dv}, \frac{d^2x}{dv^2}, \dots, \frac{d^{m+n}x}{dv^{m+n}}$, zu eliminiren. Man erhält hierdurch eine Gleichung zwischen y

und v , deren Integral nach den früher entwickelten Methoden zu suchen ist. Hätte man die erste der gegebenen Gleichungen q mal und die zweite p mal differentirt, und hätte man aus dem System der Gleichungen, welches man so erhält, $y, \frac{dy}{dv}, \frac{d^2y}{dv^2}, \dots, \frac{d^{p+q}y}{dv^{p+q}}$ eliminirt, so wäre man auf eine Differentialgleichung zwischen x und v gekommen, deren Integral die gesuchte Relation zwischen x und v ausdrückt.

Wenn die Zahl der abhängig Veränderlichen, aber ebenso die Zahl der gegebenen Gleichungen, zunimmt, so bleibt, wie leicht zu übersehen ist, das Verfahren dasselbe.

160) Integration durch Reihen. Wenn keine der bisher entwickelten Methoden genügt um das Integral einer vorgelegten Differentialgleichung zu bestimmen, so bleibt nur zu untersuchen übrig, in wie weit ein solches Integral annähernd bestimmt werden könne. Die Methode, die hier in Anwendung kömmt, ist die der Entwicklung des Integrals in eine unendliche Reihe. Soll hiermit für die Bestimmung des numerischen Werthes eines Integrals etwas erreicht werden, so muss, wie sich von selbst versteht, die Reihe summirbar d. h. convergent sein.

Es sind hier zweierlei Verfahren möglich, nämlich eines, welches sich auf die Anwendung der Taylor'schen Reihe stützt, und ein zweites, welches auf die Methode der unbestimmten Coefficienten basirt ist.

Gesetzt es sei zunächst eine Differentialgleichung des ersten Grades

$$201) \quad dy = f(x, y)dx$$

gegeben, und es soll y durch eine nach den Potenzen von x geordneten Reihe ausgedrückt werden.

Aus der gegebenen Gleichung ist der Werth von $\frac{dy}{dx}$ bekannt. Durch successive Differentiation können daher die Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$ bestimmt werden. Nach dem Taylor'schen Problem ist nun, wenn man $y = F(x)$ setzt

$$F(x+h) = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \dots$$

Setzt man hierin $x = a$ und $h = x - a$, so erhält man:

$$202) \quad y = (y)_{x=a} + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} \cdot (x-a) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a} \cdot \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

Wenn in dieser Gleichung die Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ... welche sich aus *No. 201* ergeben, eingeführt werden, und wenn man zugleich beachtet, dass durch $x=a$ auch y eine constante Grösse wird, so ist klar, dass die Gleichung *No. 202* das vollständige Integral der gegebenen Gleichung ausdrückt, denn sie genügt der Gleichung *No. 201*, und enthält eine neue willkürliche Constante.

Beispiel.

Man soll das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

bestimmen.

Hier ist:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x, \dots$$

daher:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \cos a, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a} = -\sin a, \quad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=a} = -\cos a, \dots$$

Führt man diese Werthe in *No. 202* ein, und bezeichnet man zugleich durch b den Werth, welchen y durch $x=a$ erhält, so findet man für das gesuchte Integral

$$y = b + \cos a \left((x-a) - \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(x-a)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right) \\ - \sin a + \sin a \left(1 - \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x-a)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right).$$

Da

$$\sin(x-a) = (x-a) - \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(x-a)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

$$\cos(x-a) = 1 - \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x-a)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots,$$

so ist:

$$y = b + \cos a \cdot \sin(x-a) + \sin a \cdot \cos(x-a) - \sin a,$$

daher:

$$y = b - \sin a + \sin x.$$

Durch Aenderung der Constanten erhält man daher:

$$y = C + \sin x,$$

wie auch sonst bekannt ist.

161) Dasselbe Verfahren, welches im vorhergehenden §. zur Entwicklung des Integrals einer Differentialgleichung des ersten Grades angewendet wurde, kann auf Differentialgleichungen eines beliebigen Grades ausgedehnt werden.

Gesetzt es sei

$$203) \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

die gegebene Differentialgleichung des n ten Grades.

Durch successive Differentiation dieser Gleichung erhält man die Werthe von $\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}, \frac{d^{n+2} y}{dx^{n+2}}, \dots$ Nach No. 202 ist für eine beliebige Function von x

$$204) y = (y)_{x=a} + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}(x-a) + \dots \\ + \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_{x=a} \frac{(x-a)^n}{1.2.3 \dots n} + \left(\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}\right)_{x=a} \frac{(x-a)^{n+1}}{1.2.3 \dots (n+1)} + \dots$$

Setzt man hierin für $\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}, \dots$ die Werthe, welche sich aus der Gleichung No. 203 und aus den successiven Differentiationen derselben ergeben, und bezeichnet man ferner die Werthe, welche $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$ für $x = a$ erhalten durch $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$, so erhält man eine Gleichung, welche der vorgelegten Differentialgleichung genügt, und überdiess n willkürliche Constante enthält, welche daher als das vollständige Integral von No. 203 zu betrachten ist.

Beispiel.

Man soll das Integral von

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = xy$$

durch eine unendliche Reihe ausdrücken.

Aus der vorgelegten Differentialgleichung folgt:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x \frac{dy}{dx} + y,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = x \frac{d^3y}{dx^3} + 3 \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = x \frac{d^4y}{dx^4} + 4 \frac{d^3y}{dx^3},$$

$$\dots$$

Wenn man die Werthe, welche y und $\frac{dy}{dx}$ durch $x=0$ erhalten, durch C_1 und C_2 bezeichnet, so erhält man:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{d^8y}{dx^8}\right)_{x=0} = 0,$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0} = c_1, \quad \left(\frac{d^6y}{dx^6}\right)_{x=0} = 4 \cdot c_1, \quad \left(\frac{d^9y}{dx^9}\right)_{x=0} = 4 \cdot 7 \cdot c_1,$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{x=0} = 2c_2, \quad \left(\frac{d^7y}{dx^7}\right)_{x=0} = 2 \cdot 5 \cdot c_2, \quad \left(\frac{d^{10}y}{dx^{10}}\right)_{x=0} = 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot c_2,$$

Führt man diese Werthe in *No. 204* ein, nachdem man zuvor dort $a=0$ gesetzt hat, so erhält man für das gesuchte Integral:

$$y = c_1 \left(1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots \right)$$

$$+ c_2 \left(x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{x^{10}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} + \dots \right)$$

162) Es wurde schon in §. 160 erwähnt, dass auch nach der Methode der unbestimmten Coefficienten das Integral einer Differentialgleichung durch eine nach den Potenzen der unabhängig Veränderlichen geordneten Reihe entwickelt werden könne. Diese Methode ist wichtig, theils weil sie in vielen Fällen leichter zum Ziele führt, als die eben dargestellte, theils weil sie auch noch in den Fällen anwendbar ist, in welchen die Taylor'sche Reihe nicht mehr gebraucht werden kann.

Die Methode erläutert sich am besten an Beispielen. Es sei wie im vorhergehenden § die zu integrierende Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy.$$

Das Integral derselben sei.

$$205) \quad y = a_0 x^\alpha + a_1 x^{\alpha+1} + a_2 x^{\alpha+2} + \dots,$$

wo $a, a_1, a_2 \dots$ und α näher zu bestimmende Grössen sind. Durch wiederholte Differentiation dieser Gleichung erhält man:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a_0 \alpha (\alpha - 1) x^{\alpha-2} + a_1 (\alpha + 1) \alpha x^{\alpha-1} + a_2 (\alpha + 2) (\alpha + 1) x^\alpha + \dots$$

Führt man diesen Werth, so wie den von y in der gegebenen Differentialgleichung ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} & a_0 \alpha (\alpha - 1) x^{\alpha-2} + a_1 (\alpha + 1) \alpha x^{\alpha-1} + a_2 (\alpha + 2) (\alpha + 1) x^\alpha + \dots \\ & = a_0 x^{\alpha+1} + a_1 x^{\alpha+2} + a_2 x^{\alpha+3} + \dots \end{aligned}$$

In dieser Gleichung müssen die Vorzahlen gleicher Potenzen von x einander gleich sein, weil nach der Voraussetzung die Gleichung No. 205 das Integral der vorgelegten Differentialgleichung sein soll, und daher dieser genügen muss. Man erhält hierdurch folgende Gleichungen:

$$a_0 \alpha (\alpha - 1) = 0,$$

$$a_1 (\alpha + 1) \alpha = 0,$$

$$a_2 (\alpha + 2) (\alpha + 1) = 0,$$

$$a_3 (\alpha + 3) (\alpha + 2) = a_0,$$

$$a_4 (\alpha + 4) (\alpha + 3) = a_1,$$

$$a_5 (\alpha + 5) (\alpha + 4) = a_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

Setzt man $\alpha = 0$, und bezeichnen a_0, a_1 unbestimmte constante Grössen, so erhält man aus den vorhergehenden Gleichungen:

$$a_2 = 0,$$

$$a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3},$$

$$a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 4},$$

$$a_5 = 0,$$

$$a_6 = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6},$$

$$\dots \dots \dots$$

Es wird hierdurch

$$\begin{aligned} y = & a_0 \left(1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots \right) \\ & + a_1 \left(x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{x^{10}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} + \dots \right). \end{aligned}$$

Durch diese Werthe von $a_0, a_1, a_2, \dots$ und α wird

$$y = a_0 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3.4} - \dots \right) \\ + a_1 \left(1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \dots \right).$$

Es ist aber:

$$\frac{1}{x} - \frac{x}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3.4} - \dots = \frac{\cos x}{x},$$

$$1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \dots = \frac{\sin x}{x},$$

hierdurch wird:

$$y = \frac{a_0 \cos x + a_1 \sin x}{x},$$

welche Gleichung das gesuchte Integral ist, denn sie genügt der vorgelegten Differentialgleichung und enthält zwei willkürliche Constanten a_0 und a_1 .

Sollte endlich das Integral der Gleichung des zweiten Grades

$$206) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0$$

bestimmt werden, so würde man auf ganz ähnlichem Wege, wie in dem vorhergehenden Falle finden

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \dots \right),$$

wo a_0 eine willkürliche Constante ist. Diese Gleichung kann aber nur als ein partikulares Integral der vorgelegten Differentialgleichung betrachtet werden, denn das vollständige Integral einer Gleichung des zweiten Grades muss zwei willkürliche Constante enthalten. Es lässt sich indess in diesem Falle das vollständige Integral, gestützt auf die Kenntniss des partikularen Integrals, herstellen, und zwar nach einem Verfahren, welches dem oben bei den linearen Gleichungen gebrauchten ähnlich ist. Gesetzt nämlich es sei

$$y = C \cdot X$$

das gesuchte vollständige Integral, wo C eine Function von x und

$$X = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \dots$$

ist. Durch successive Differentiation erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = C \frac{dX}{dx} + X \cdot \frac{dC}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + 2 \frac{dC}{dx} \cdot \frac{dX}{dx} + X \cdot \frac{d^2C}{dx^2}.$$

Führt man diese Werthe in *No. 206* ein, so erhält man:

$$C \left(\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{X} \cdot \frac{dX}{dx} + X \right) + X \cdot \frac{d^2C}{dx^2} + \left(2 \frac{dX}{dx} + \frac{X}{X} \right) \frac{dC}{dx} = 0.$$

Da $y = a_0 X$ ein partikulares Integral von *No. 206* ist, so muss sein

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{X} \cdot \frac{dX}{dx} + X = 0,$$

folglich ist auch:

$$X \frac{d^2C}{dx^2} + \left(2 \frac{dX}{dx} + \frac{X}{X} \right) \frac{dC}{dx} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d^2C}{dx^2} = - \frac{2}{X} \cdot \frac{dX}{dx} \cdot \frac{dC}{dx} - \frac{1}{X} \cdot \frac{dC}{dx}.$$

Setzt man $\frac{dC}{dx} = p$, $\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, so findet man:

$$dp = - 2 \frac{dX}{X} p - \frac{dx}{X} \cdot p.$$

Es ist daher:

$$\lg p = \lg \frac{c}{X^2 X},$$

folglich:

$$p = \frac{c}{X^2 X},$$

wo c eine willkürliche Constante bezeichnet.

Da $p = \frac{dC}{dx}$, so erhält man:

$$C = c \int \frac{dx}{X^2 X} + c^1.$$

Das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung ist daher:

$$y = \left(c \int \frac{dx}{X^2 X} + c^1 \right) X.$$

Dritte Abtheilung.

Integration der Differentialformeln des ersten Grades und mehrerer unabhängig Veränderlichen.

163) Das Differential einer Function zweier Veränderlichen besteht aus zwei Theilen, aus dem Differential in Hinsicht der einen und aus dem Differential in Hinsicht der andern der veränderlichen Grössen. Es hat dasselbe in Allgemeinen die Form $Pdx + Qdy$, wo P und Q Functionen von x , y bezeichnen. Es wurde schon in der Differentialrechnung pag. 29 bewiesen, dass wenn $Pdx + Qdy$ das exacte Differential einer Function zweier Veränderlichen ist, so sei auch

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

Umgekehrt wird, wenn eine vorgelegte Differentialformel eben dieser Bedingung Genüge leistet, dies ein Beweis sein, dass diese Formel das exacte Differential einer Function zweier Veränderlichen ist. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, so kann von dem Integral einer solchen Formel gar nicht die Rede sein, denn es ist gewiss, dass es keine Function zweier von einander unabhängiger Variabeln giebt, durch deren Differentiation jene Differentialformel entstanden sein könnte.

Das Integral einer Formel $Pdx + Qdy$, welche der Bedingung $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ genügt, wird durch zwei Integrationen, nämlich einer in Hinsicht x und einer in Hinsicht y , gewonnen, so wie auch umgekehrt das Differential durch zwei Differentiationen hergestellt wurde. Gesetzt nämlich es sei Z das gesuchte Integral, so dass man hat

$$dZ = Pdx + Qdy.$$

Betrachtet man y als eine constante Grösse, und integrirt man, so erhält man:

$$Z = \int Pdx + Y,$$

wo Y eine Constante bezeichnet, die aber in diesem Falle auch y enthalten wird. Der partielle Differentialquotient von Z ist hiernach :

$$\frac{dZ}{dy} = \frac{d \int P dx}{dy} + \frac{dY}{dy}.$$

Es ist aber zugleich

$$\frac{dZ}{dy} = Q,$$

folglich :

$$Q = \frac{d \int P dx}{dy} + \frac{dY}{dy}.$$

Hieraus folgt :

$$P = \int \left(Q - \int dx \frac{dP}{dy} \right) dy.$$

Es ist daher das vollständige Integral:

$$Z = \int P dx + \int \left(Q - \int dx \frac{dP}{dy} \right) dy + C.$$

164) Die allgemeine Form einer Differentialformel dreier Veränderlichen ist :

$$P dx + Q dy + R dz,$$

wo P, Q, R Functionen von x, y, z sind. Soll dieselbe ein exactes Differential d. h. das Ergebniss der Differentiation einer Function dreier Veränderlichen sein, so müssen die Functionen P, Q, R , wie schon in der Differentialrechnung S. 32 bewiesen wurde, folgenden Gleichungen genügen :

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}, \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}.$$

Genügen sie diesen Gleichungen nicht, so giebt es kein Integral der vorgelegten Differentialformel, genügen sie denselben, so giebt es ein Integral, und zwar wird dasselbe durch ein ganz analoges Verfahren, wie das im vorhergehenden § befolgte, erhalten.

Gesetzt es sei U das gesuchte Integral, so dass man hat:

$$dU = P dx + Q dy + R dz.$$

Durch Integration erhält man:

$$U = \int P dx + Y,$$

wo Y eine Function von y und z bezeichnet.

Das Differential von U in Hinsicht y ist:

$$\frac{dU}{dy} = \int dx \frac{dP}{dy} + \frac{dY}{dy}.$$

Es ist aber auch $\frac{dU}{dy} = Q$, daher:

$$Q = \int dx \frac{dP}{dy} + \frac{dY}{dy}.$$

Hieraus folgt:

$$Y = \int \left(Q - \int dx \frac{dP}{dy} \right) dy + Z,$$

wo Z eine Function von z ist. Durch diesen Werth von Y erhält man:

$$U = \int P dx + \int \left(Q - \int dx \frac{dP}{dy} \right) dy + Z.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dU}{dz} = \int dx \frac{dP}{dz} + \int \left(\frac{dQ}{dz} - \int dx \frac{d^2P}{dy dz} \right) dy + \frac{dZ}{dz},$$

es ist aber auch $\frac{dU}{dz} = R$, daher:

$$R = \int dx \frac{dP}{dz} + \int \left(\frac{dQ}{dz} - \int dx \frac{d^2P}{dy dz} \right) dy + \frac{dZ}{dz},$$

folglich:

$$Z = \int \left[R - \int dx \frac{dP}{dz} + \int \left(\frac{dQ}{dz} - \int dx \frac{d^2P}{dy dz} \right) dy \right] dz.$$

Führt man diesen Werth ein, so findet man:

$$U = \int P dx + \int \left(Q - \int dx \frac{dP}{dy} \right) dy + \int \left[R - \int dx \frac{dP}{dz} + \int \left(\frac{dQ}{dz} - \int dx \frac{d^2P}{dy dz} \right) \right] dz + C.$$

Man erkennt aus dem Bisherigen wie zu verfahren ist, wenn das Integral einer Differentialformel von vier und mehreren Veränderlichen herzustellen wäre. Jedenfalls ist indess zuerst zu prüfen, ob die gegebene Differentialformel ein exactes Differential ist oder nicht, eine Prüfung, welche nach den S. 29 u. f. entwickelten Gesetzen leicht auszuführen ist.

165) 1tes Beispiel.

Es soll das Integral der Formel:

$$dU = 2x \operatorname{Arc} \left(\sin = \frac{y}{z} \right) dx + \frac{x^2}{\sqrt{z^2 - y^2}} dy - \frac{yx^2}{z \sqrt{z^2 - y^2}} dz$$

bestimmt werden.

Da

$$\frac{dP}{dy} = \frac{2x}{\sqrt{z^2 - y^2}} \text{ und } \frac{dQ}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{z^2 - y^2}},$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{2xy}{z\sqrt{z^2 - y^2}} \text{ und } \frac{dR}{dx} = -\frac{2xy}{z\sqrt{z^2 - y^2}},$$

$$\frac{dQ}{dz} = -\frac{x^2z}{(z^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ und } \frac{dR}{dy} = -\frac{x^2z}{(z^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

so ist die vorgelegte Formel ein exactes Differential.

Betrachtet man zunächst nur x als veränderlich, so erhält man:

$$U = x^2 \text{Arc} \left(\sin = \frac{y}{z} \right) + Y,$$

wo Y eine Function von y und z sein kann. Es ist hiernach:

$$\frac{dU}{dy} = \frac{x^2}{\sqrt{z^2 - y^2}} + \frac{dY}{dy}.$$

Nach der vorgelegten Formel ist:

$$\frac{dU}{dy} = \frac{x^2}{\sqrt{z^2 - y^2}},$$

es ist daher:

$$\frac{x^2}{\sqrt{z^2 - y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{z^2 - y^2}} + \frac{dY}{dy},$$

folglich:

$$\frac{dY}{dy} = 0.$$

Es folgt hieraus

$$Y = Z,$$

wo Z eine Function bezeichnet, in welcher nur z und nicht y enthalten ist. Man erhält hierdurch:

$$U = x^2 \text{Arc} \left(\sin = \frac{y}{z} \right) + Z.$$

Es ist daher:

$$\frac{dU}{dz} = -\frac{yx^2}{z\sqrt{z^2 - y^2}} + \frac{dZ}{dz},$$

und nach der vorgelegten Formel ist:

$$\frac{dU}{dz} = -\frac{yx^2}{z\sqrt{z^2 - y^2}},$$

folglich ist:

$$\frac{dZ}{dz} = 0,$$

daher $Z = C$.

Das gesuchte Integral ist demnach:

$$x^2 \operatorname{Arc} \left(\sin = \frac{y}{z} \right) + C.$$

2tes Beispiel.

Man soll das Integral der Formel:

$$dU = \frac{2dx}{x} + \left(z - \frac{2y}{y^2+z^2} \right) dy + \left(y - 2z - \frac{2z}{y^2+z^2} \right) dz$$

bestimmen.

In dieser Formel ist:

$$\frac{dP}{dy} = 0 \text{ und } \frac{dQ}{dx} = 0,$$

$$\frac{dP}{dz} = 0 \text{ und } \frac{dR}{dx} = 0,$$

$$\frac{dQ}{dz} = 1 + \frac{4yz}{(y^2+z^2)^2} \text{ und } \frac{dR}{dy} = 1 + \frac{4yz}{(y^2+z^2)^2},$$

die vorgelegte Formel ist daher ein exactes Differential.

Integriert man in Hinsicht x, so erhält man:

$$U = \lg x^2 + Y,$$

wo Y im Allgemeinen eine Function von y und z bezeichnet.

Es ist hiernach:

$$\frac{dU}{dy} = \frac{dY}{dy}.$$

Nach der vorgelegten Formel ist:

$$\frac{dU}{dy} = z - \frac{2y}{y^2+z^2},$$

es ist daher:

$$\frac{dY}{dy} = z - \frac{2y}{y^2+z^2},$$

folglich:

$$Y = yz - \lg(y^2+z^2) + Z,$$

wo Z eine Function von z ist.

Man erhält hierdurch:

$$U = \lg x^2 + yz - \lg(y^2+z^2) + Z.$$

Es ist daher:

$$\frac{dU}{dz} = y - \frac{2z}{y^2+z^2} + \frac{dZ}{dz},$$

und nach der vorgelegten Formel ist:

$$\frac{dU}{dz} = y - 2z - \frac{2z}{y^2+z^2}.$$

Es ist daher:

$$\frac{dZ}{dz} = -2z,$$

folglich:

$$Z = -z^2 + C.$$

Das gesuchte Integral ist daher:

$$\lg x^2 + yz - \lg (y^2 + z^2) - z^2 + C$$

oder:

$$\lg \frac{x^2}{y^2 + z^2} + z(y - z) + C.$$

166) Wenn das Integral einer Differentialgleichung dreier Veränderlichen bestimmt werden soll, so ist, wie bei den Differentialformeln, zunächst die Vorfrage zu entscheiden, ob die gegebene Gleichung als ein exactes Differential oder überhaupt auch nur mittelbar als das Ergebniss der Differentiation einer Gleichung zu betrachten sei. Es sind daher vor Allem die Kennzeichen hierfür festzustellen.

Gesetzt es sei:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

die gegebene Gleichung, wo P, Q und R Functionen von x, y, z sind. Es ist dieselbe jedenfalls ein exactes Differential wenn

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}, \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$$

ist. Wenn diese Gleichungen nicht erfüllt werden, so ist die vorgelegte Differentialgleichung nicht unmittelbar das Ergebniss einer Differentiation, doch folgt hieraus noch nicht, dass sie überhaupt kein Integral besitze, und demnach als absurd zu betrachten sei, denn es kann sein, dass ein gemeinschaftlicher Factor aus der Differentialgleichung entfernt wurde, oder dass die Differentialgleichung dadurch entstanden ist, dass aus einer Gleichung $F(x, y, z) = 0$, und dem ersten Differential derselben eine constante Grösse eliminirt wurde. In beiden Fällen würden die obigen Bedingungen nicht erfüllt werden, und doch müsste die Differentialgleichung als integrabel betrachtet werden. Es ist daher festzustellen: unter welcher Bedingung eine Differentialgleichung, die nicht ein exactes Differential ist, dennoch als integrabel zu betrachten ist.

Gesetzt es sei:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

eine Gleichung, die den Bedingungsgleichungen für ein exactes Integral nicht genügt. Es können in dieser Gleichung nur zwei der Veränderlichen x, y, z als unabhängig Veränderliche betrachtet werden, die dritte ist eine Function der beiden andern.

Gesetzt es sei z die abhängig Veränderliche. Das Differential derselben ist nach der vorgelegten Gleichung:

$$dz = -\frac{P}{R} dx - \frac{Q}{R} dy.$$

Die Brüche $\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}$ enthalten x, y und z , da aber z eine Function von x und y ist, so sind auch $\frac{P}{R}$ und $\frac{Q}{R}$ Functionen von x und y .

Die Bedingung der Integrabilität der vorstehenden Gleichung ist daher:

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{P}{R} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{Q}{R} \right).$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left(\frac{P}{R} \right) &= \frac{d \left(\frac{P}{R} \right)}{dy} + \frac{d \left(\frac{P}{R} \right)}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \\ &= \frac{R \frac{dP}{dy} - P \frac{dR}{dy}}{R^2} + \frac{R \frac{dP}{dz} - P \frac{dR}{dz}}{R^2} \cdot \frac{dz}{dy}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{Q}{R} \right) &= \frac{d \left(\frac{Q}{R} \right)}{dx} + \frac{d \left(\frac{Q}{R} \right)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{R \frac{dQ}{dx} - Q \frac{dR}{dx}}{R^2} + \frac{R \frac{dQ}{dz} - Q \frac{dR}{dz}}{R^2} \cdot \frac{dz}{dx}, \end{aligned}$$

beachtet man ferner dass:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{Q}{R},$$

so erhält man als Bedingung der Integrabilität der vorgelegten Gleichung:

$$\begin{aligned} &R \frac{dP}{dy} - P \frac{dR}{dy} - R \frac{dP}{dz} \cdot \frac{Q}{R} + P \frac{dR}{dz} \cdot \frac{Q}{R} \\ &= R \frac{dQ}{dx} - Q \frac{dR}{dx} - R \frac{dQ}{dz} \cdot \frac{P}{R} + Q \frac{dR}{dz} \cdot \frac{P}{R} \end{aligned}$$

oder :

$$207) P \left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) + Q \left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \right) + R \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \right) = 0.$$

Wenn in einer Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ die Grössen P, Q, R der Gleichung No. 207 nicht genügen, so kann von dem Integral derselben nicht die Rede sein, denn es existirt ein solches nicht, es müsste denn sein, dass nur eine der Grössen x, y, z unabhängig veränderlich wäre, und die beiden andern irgendwie von derselben abhängen; in diesem Falle würde aber die Integration nach den in der ersten Abtheilung entwickelten Regeln auszuführen und nicht zu den hier in Betracht kommenden Problemen zu rechnen sein.

167) Die Integration einer Differentialgleichung dreier Veränderlichen, welche der im vorhergehenden § angegebenen Bedingungsgleichung genügt, kann immer auf die Integration einer Gleichung nur zweier Veränderlichen zurückgebracht werden. Es kann daher das vollständige Integral in so weit hergestellt werden, als dies für Gleichungen nur zweier Veränderlichen auch der Fall ist.

Betrachtet man, um dies näher zu begründen, in der Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ eine der Veränderlichen, etwa z , als constant, so ist $dz = 0$, und man hat

$$Pdx + Qdy = 0$$

Das Integral dieser Gleichung ist nach den früher aufgestellten Regeln zu bestimmen. Gesetzt man finde für dasselbe

$$V + Z = 0,$$

wo V eine Function von x, y, z bezeichnet, und Z eine willkürliche Constante ist, die indess in dem vorliegenden Fall auch z enthalten kann. Durch Differentiation dieser Gleichung erhält man:

$$\frac{dV}{dx} dx + \frac{dV}{dy} dy + \frac{dV}{dz} dz + \frac{dZ}{dz} dz = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der gegebenen

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

so erkennt man dass

$$M.R = \frac{dV}{dz} + \frac{dZ}{dz}$$

sein werde, wo der Factor M im Allgemeinen eine Function von x, y, z bezeichnet. Aus der letzten Gleichung erhält man

$$dZ = MRdz - \frac{dV}{dz} dz,$$

daher:

$$Z = \int \left(MR - \frac{dV}{dz} \right) dz + C.$$

Das vollständige Integral ist demnach:

$$V + \int \left(MR - \frac{dV}{dz} \right) dz + C = 0.$$

1tes Beispiel.

Es soll das Integral der Gleichung

$$azdx + bzdy - (ax + by)dz = 0$$

bestimmt werden.

Hier ist:

$$P = az, Q = bz, R = -(ax + by),$$

daher:

$$\frac{dP}{dx} = 0, \frac{dP}{dz} = a, \frac{dQ}{dy} = 0, \frac{dQ}{dz} = b, \frac{dR}{dx} = -a, \frac{dR}{dy} = -b.$$

Diese Werthe genügen der Gleichung No. 207, die vorgelegte Differentialgleichung ist daher integrabel.

Betrachtet man z als constant, so erhält man:

$$azdx + bzdy = 0.$$

Diese Gleichung ist, da die Veränderlichen x, y schon gesondert sind, unmittelbar integrabel, der Factor M ist daher in diesem speciellen Falle gleich der Einheit, und man erhält als Integral:

$$azx + bzy + Z = 0.$$

Differentirt man diese Gleichung in Hinsicht der drei Veränderlichen x, y, z , so erhält man:

$$azdx + bzdy + (ax + by)dz + \frac{dZ}{dz} dz = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der vorgelegten, so findet man:

$$(ax + by) + \frac{dZ}{dz} = -(ax + by),$$

daher:

$$dZ = -2(ax + by) dz.$$

Es ist aber:

$$ax + by = -\frac{Z}{z},$$

daher:

$$\frac{dZ}{Z} = z \frac{dz}{z},$$

folglich

$$\lg Z = \lg z^2 C,$$

daher:

$$Z = z^2 C.$$

Das vollständige Integral wird hierdurch

$$azx + bzy + z^2 C = 0,$$

oder:

$$ax + by + Cz = 0.$$

2tes Beispiel.

Es wird das Integral der Gleichung

$$2yzdx + xzdy - 2xydz = 0$$

gesucht.

Hier ist:

$$P = 2yz, Q = xz, R = -2xy,$$

$$\frac{dP}{dy} = 2z, \frac{dQ}{dx} = z, \frac{dR}{dx} = -2y,$$

$$\frac{dP}{dz} = 2y, \frac{dQ}{dz} = x, \frac{dR}{dy} = -2x.$$

Diese Werthe genügen der Gleichung No. 207, es ist daher die vorgelegte Gleichung integrabel.

Betrachtet man z als unveränderlich, so wird $dz=0$, daher

$$2yz dx + xz dy = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{1}{xyz}$, so erhält man:

$$2 \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0,$$

durch Integration dieser Gleichung findet man

$$\lg x^2 y + Z = 0$$

Differentirt man diese Gleichung in Hinsicht x, y und z , so erhält man

$$2 \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dZ}{dz} dz = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der vorgelegten, die indess zuerst mit dem Factor M , der in diesem Falle $\frac{1}{xyz}$ ist, multiplicirt werden muss, so erkennt man dass

$$\frac{dz}{dz} = \frac{2}{z},$$

daher:

$$Z = - \lg z^2 a$$

ist, wo a eine willkürliche Constante bezeichnet.

Das vollständige Integral ist daher:

$$\lg x^2 y = \lg z^2 a$$

oder:

$$x^2 y - az = 0.$$

108) Integration der Differentialgleichungen mit partiellen Differentialen. Wenn Differentialgleichungen mit mehreren unabhängig Veränderlichen nur in den bisher betrachteten Formen auftreten würden, so hätte die Integration derselben keine grosse Schwierigkeiten, und gewiss keine grösseren als die, welche die Differentialgleichungen mit nur einer unabhängig Veränderlichen ebenfalls darbieten. Man kann aber Differentialgleichungen von ganz anderen Formen sich vorlegen, die nämlich so beschaffen sind, dass durch dieselben nur ausgedrückt wird, es existire für die partiellen Differentialquotienten eine bestimmte durch die Gleichung näher bezeichnete Relation, oder durch welche auch nur ausgesagt ist, welche eine Function der unabhängig Veränderlichen einer der partiellen Differentialquotienten sei. Gleichungen dieser Art werden Differentialgleichungen mit partiellen Differentialen genannt. Während also in einer vollständigen Differentialgleichung die partiellen Differentialquotienten als Functionen der Veränderlichen auftreten, und vollständig gegeben sind, ist in Differentialgleichungen mit partiellen Differentialen nur eine Bedingung angegeben, an welche einer oder mehrere der partiellen Differentialquotienten gebunden sind. Es sei z. B. z eine Function von x und y . Das vollständige Differential ist

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy.$$

Die partiellen Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ sind Functionen von x und y , oder auch Functionen von x , y und z , weil z selbst eine Function von x und y ist. Sind nun diese Functionen

gegeben, so hat man es mit einer vollständigen Differentialgleichung zu thun, ist aber nur ausgesagt es sei $\frac{dz}{dx}$ eine gewisse Function von x und y , während $\frac{dz}{dy}$ ganz unbestimmt gelassen ist, so dass also gegeben wäre

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y)$$

so ist dies eine Differentialgleichung mit einem partiellen Differential. Ebenso ist

$$\frac{dz}{dy} = F(x, y)$$

eine Differentialgleichung mit einem partiellen Differential, und Allgemein ist

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0$$

die allgemeinste Form einer Differentialgleichung mit partiellen Differentialen von nur zwei unabhängig Veränderlichen.

Da nur ausgesagt ist, es sei der eine oder es seien beide Differentialquotienten an die oder jene Bedingung gebunden, ohne dass die Beschaffenheit dieser Quotienten näher bezeichnet wird, so liegt hierin eine Unbestimmtheit, die begreiflich auch in dem Integral in gleicher Weise sich herausstellen muss.

Die Integration der Differentialgleichungen mit partiellen Differentialen hat an und für sich ihr rein wissenschaftliches Interesse, sie ist aber überdiess sehr wichtig der Bedeutung halber, welche solche Gleichungen in der analytischen Geometrie und analytischen Mechanik besitzen.

Es soll in Folgendem mit der Integration der einfacheren Formen begonnen werden.

169) Die zu integrirende Gleichung sei

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y),$$

wo z eine Function von x und y bezeichnet, x, y aber unabhängig Veränderliche sind.

Das vollständige Differential von z ist

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy.$$

Durch die vorgelegte Gleichung ist nur angegeben, welche eine Function der partielle Differentialquotient von x und y ist, der Quotient $\frac{dz}{dy}$ ist dagegen ganz unbestimmt gelassen, es ist daher für z nur eine solche Function von x und y zu suchen, durch welche $\frac{dz}{dx}$ gleich der gegebenen Function $f(x, y)$ wird.

Dies wird einfach durch eine Integration der Gleichung

$dz = f(x, y) dx$ erreicht, wenn in derselben nur x und nicht y als veränderlich betrachtet wird. Man erhält

$$z = \int f(x, y) dx + Y$$

wo Y eine beliebige Function von y bezeichnet.

Es sei z. B.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y^3}{x^2 + y^2},$$

so ist:

$$dz = \frac{y^3 dx}{x^2 + y^2},$$

daher:

$$z = \int \frac{y^3 dx}{x^2 + y^2} = y^2 \operatorname{Arc} \left(\operatorname{tang} = \frac{x}{y} \right) + Y.$$

Wenn

$$\frac{dz}{dy} = f(x, y)$$

die zu integrirende Gleichung ist, so hat man

$$dz = f(x, y) dy,$$

daher:

$$z = \int f(x, y) dy + X,$$

wo X eine Function von x bezeichnet.

Wenn endlich die vorgelegte Gleichung die Form

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y, z),$$

oder die Form

$$\frac{dz}{dy} = f(x, y, z)$$

besitzt, so kommt es in dem einen, wie in dem andern dieser Fälle darauf an, ob eine Sonderung der Veränderlichen möglich ist. Ist dies möglich, so wird ganz wie früher integrirt, und in

dem ersten Falle eine Constante hinzugefügt, die eine beliebige Function von y , und in dem zweiten eine Constante, die eine beliebige Function von x ist.

170) Die Aufgabe wird allgemeiner, wenn die zu integrierende Gleichung die Form

$$m \frac{dz}{dx} + n \frac{dz}{dy} = 0$$

besitzt, wo m und n beliebige Functionen von x, y sind.

Das vollständige Differential von z ist

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy.$$

Setzt man $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, so hat man auch

$$\alpha) \quad dz = p dx + q dy.$$

Die Aufgabe kann nun so ausgedrückt werden: man soll z so bestimmen, dass die partiellen Differentialquotienten der Gleichung

$$\beta) \quad mp + nq = 0$$

genügen. Eliminirt man zu diesem Zwecke aus (α) und (β) den Quotienten q , so erhält man

$$\begin{aligned} dz &= p dx - \frac{m}{n} p dy \\ &= \frac{p}{n} (ndx - mdy). \end{aligned}$$

Die in Klammern stehende Grösse $ndx - mdy$ ist entweder unmittelbar das Differential einer Function von x und y , oder wird dies durch Multiplication mit einem Factor L , der im Allgemeinen eine Function von x und y ist, so dass man setzen kann

$$ndx - mdy = \frac{dU}{L},$$

wo U eine Function von x und y bezeichnet. Es ist hiernach

$$dz = \frac{p}{nL} \cdot dU.$$

Ueber den Werth von p ist nicht näher verfügt, man kann für denselben willkürlich jede beliebige Function von x, y setzen,

daher auch einen solchen Werth annehmen, dass $\frac{p}{nL}$ eine Function von U wird, so dass man hat

$$dz = F(U)dU,$$

es ist daher:

$$z = f(U).$$

Es sei z. B.

$$x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = 0$$

die zu integrirende Gleichung.

Es ist hiernach:

$$xp + yq = 0.$$

Das vollständige Differential hat die Form

$$dz = p dx + q dy.$$

Eliminirt man q , so erhält man:

$$dz = \frac{p}{y} (y dx - x dy).$$

Es ist aber

$$y dx - x dy = y^2 \cdot d \frac{x}{y},$$

daher:

$$dz = p y \cdot d \frac{x}{y},$$

folglich

$$z = F\left(\frac{x}{y}\right).$$

171) Es soll nun ferner das Integral einer Gleichung von der Form

$$208) \quad \frac{dz}{dx} + m \frac{dz}{dy} + n = 0$$

bestimmt werden, wo wieder m und n beliebige Functionen von x und y bezeichnen.

Gesetzt

$$z = f(x, y)$$

sei das gesuchte Integral. Das vollständige Differential dieser Gleichung ist

$$209) \quad dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy.$$

Durch die vorgelegte Gleichung No. 208 ist angegeben, welcher Bedingung die partiellen Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ unterworfen sind, es sagt nämlich dieselbe aus, dass

$$\frac{dz}{dx} = -m \frac{dz}{dy} - n,$$

oder :

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{m} \frac{dz}{dx} - \frac{n}{m}.$$

Führt man den einen dieser Werthe, etwa den ersten, in **No. 209** ein, so erhält man

$$210) \quad dz + ndx + \frac{dz}{dy} (mdx - dy) = 0.$$

Es kömmt nur darauf an das Integral dieser Gleichung zu bestimmen, oder jene Function von x und y zu finden, welche, gleich z gesetzt, der Gleichung **No. 210** Genüge leistet. Der gleiche Werth von z muss auch der Gleichung **No. 208** genügen, und ist daher das gesuchte Integral der vorgelegten Gleichung.

Der Gleichung **No. 210** geschieht offenbar Genüge durch die Annahme

$$dz + ndx = 0,$$

$$mdx - dy = 0,$$

eine Annahme, die dadurch gerechtfertiget ist, dass der Quotient $\frac{dz}{dy}$ durch die vorgelegte Gleichung gar nicht näher bestimmt ist, und daher eine beliebige Function von x und y bezeichnen kann.

Nach der Voraussetzung ist m nur eine Function von x und y , es enthält demnach die Gleichung

$$mdx - dy = 0$$

nur zwei Variable, das Integral derselben ist daher nach den früheren Regeln angebbar, und hat im Allgemeinen die Form

$$F(x,y) = C.$$

Hieraus folgt

$$y = \varphi(x, C).$$

Führt man diesen Werth in der Gleichung

$$dz + ndx = 0$$

ein, so enthält dieselbe nur noch zwei Veränderliche nämlich z und x , und zwar so, dass beide getrennt erscheinen. Es wird daher

$$z = -\int ndx + F_1(C).$$

In dieser Gleichung ist, nachdem die Integration ausgeführt wurde, der Werth von C nämlich $F(x, y)$ zu substituiren.

Es sei z. B.

$$xy \frac{dz}{dx} - y^2 \frac{dz}{dy} + x(1+x^2) = 0$$

die zu integrierende Differentialgleichung.

Durch Division mit xy erhält man:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{y}{x} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{1+x^2}{y} = 0,$$

es ist daher:

$$m = -\frac{y}{x}, n = \frac{1+x^2}{y}.$$

Die Gleichungen

$$dz + ndx = 0,$$

$$mdx - dy = 0,$$

gehen hierdurch in folgende über:

$$dz + \frac{1+x^2}{y} dx = 0,$$

$$-\frac{y}{x} dx - dy = 0.$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt:

$$x \cdot y = C.$$

Es ist daher:

$$y = \frac{C}{x}.$$

Führt man diesen Werth von y in der andern Gleichung ein, so wird

$$dz = -\frac{x+x^3}{C} dx,$$

daher:

$$z = -\frac{x^2}{2C} - \frac{x^4}{4C} + F_1(C).$$

Es ist aber $C = x \cdot y$, folglich

$$z = -\left(\frac{x}{2y} + \frac{x^3}{4y}\right) + F_1(x \cdot y).$$

172) Die allgemeinste Form der Gleichungen mit partiellen Differentialien des ersten Grades und nur zweier unabhängig Veränderlichen ist, wenn die Quotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ nur in der ersten Potenz auftreten,

$$211) \quad P \frac{dz}{dx} + Q \frac{dz}{dy} = R,$$

wo P , Q , R irgend welche Functionen von x, y, z bezeichnen.

Gesetzt es sei

$$f(x, y, z) = 0$$

das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung.

Es folgt hieraus

$$z = F(x, y).$$

Das vollständige Differential hiervon ist

$$212) \quad dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy.$$

Die Gleichung *No. 211* giebt nicht die Werthe der partiellen Quotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ selbst an, sie sagt nur aus, in welcher Abhängigkeit von einander diese Quotienten sich befinden. Um eben diese Abhängigkeit auch in *No. 212* auszudrücken, hat man einen der Quotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ aus *No. 211* und *212* zu eliminiren. Eliminirt man $\frac{dz}{dy}$ so findet man:

$$213) \quad Qdz - Rdy + \frac{dz}{dx} (Pdy - Qdx) = 0.$$

Da $\frac{dz}{dx}$ nicht näher bestimmt ist, und eine beliebige Function von x, y, z sein kann, so zerfällt die vorliegende Gleichung in folgende zwei

$$\begin{aligned} Qdz - Rdy &= 0, \\ Pdy - Qdx &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Elimination von dy eine dritte

$$Pdz - Rdx = 0.$$

Diese letzte Gleichung, die nur eine Folge der beiden früheren ist, würde man auch unmittelbar erhalten haben, wenn man aus *No. 211* und *212* den Quotienten $\frac{dz}{dx}$ statt $\frac{dz}{dy}$ eliminirt hätte.

Die zu lösende Aufgabe lässt sich nun in folgender Weise bezeichnen: es ist eine Gleichung zwischen x, y, z zu bestimmen, welche der Differentialgleichung *No. 213* genügt. Dieselbe Gleichung wird auch der Gleichung *No. 211* genügen, und drückt daher das Integral der vorgelegten Differentialgleichung aus. Aus der Gleichung *No. 213* gehen aber folgende drei Gleichungen hervor:

$$214) \quad \begin{cases} Qdz - Rdy = 0, \\ Pdy - Qdx = 0, \\ Pdz - Rdx = 0, \end{cases}$$

von denen immer je eine eine Folge der beiden andern ist. Durch Integration dieser Gleichungen oder einer Combination derselben erhält man zwei Gleichungen $M=a$, $N=b$, in welchen M , N Functionen von x , y , z , und a , b willkürliche Constante bezeichnen. Eliminirt man aus den Gleichungen $M=a$, $N=b$ die Veränderliche y , so erhält man eine Gleichung zwischen x , z , a , b , es kann daher x als eine Function von z , a , b bezeichnet werden. Eliminirt man hingegen x , so erhält man eine Gleichung zwischen y , z , a , b , wornach also y ebenfalls als Function von z , a , b ausgedrückt werden kann. Es wurde oben vorausgesetzt

$$f(x, y, z) = 0$$

sei das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung, führt man in demselben die Werthe von x und y ein, die sich aus den Gleichungen $M=a$, $N=b$ ergeben, so erhält man eine Gleichung, in welcher nur z und die willkürlichen Constanten nebst andern nicht willkürlichen Constanten enthalten sein können. Da aber $df(x, y, z) = 0$ ist, so muss durch die genannten Substitutionen für x und y auch z aus $f(x, y, z) = 0$ verschwinden, so dass also nur eine Gleichung zwischen a und b übrig bleibt. Das allgemeine Integral ist daher

$$\varphi(a, b) = 0,$$

wo φ eine beliebige Function bezeichnet. Es folgt hieraus $a = \psi(b)$, und wenn man die Werthe von a , b , nämlich M , N wieder einführt

$$215) \quad M = \psi(N),$$

welche Gleichung das verlangte allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung ist.

Es sei z. B. das Integral der Gleichung

$$\frac{y^2 z}{x} \cdot \frac{dz}{dx} + xz \cdot \frac{dz}{dy} = y^2$$

zu bestimmen.

Hier ist

$$P = \frac{y^2 z}{x}, Q = xz, R = y^2.$$

Die Gleichungen No. 214 gehen hierdurch in folgende über:

$$xzdz - y^2 dy = 0,$$

$$\frac{y^2 z}{x} dy - xz dx = 0,$$

$$\frac{y^2 z}{x} dz - y^2 dx = 0.$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt

$$y^2 dy - x^2 dx = 0,$$

es ist daher:

$$y^3 - x^3 = a.$$

Aus der dritten der obigen Gleichungen folgt

$$zdz - xdx = 0,$$

es ist daher:

$$z^2 - x^2 = b.$$

Das gesuchte Integral ist daher:

$$y^3 - x^3 = \varphi(z^2 - x^2).$$

173) Es setzt die im vorhergehenden § gegebene Entwicklung voraus, dass aus zweien der Gleichungen

$$Qdz - Rdy = 0,$$

$$Pdy - Qdx = 0,$$

$$Pdiz - Rdx = 0,$$

durch Integration immer zwei andere Gleichungen von der Form $M=a$, $N=b$ hergestellt werden können. Diese Integrationen haben keine Schwierigkeiten, wenn wie in dem zuletzt gegebenen Beispiel die Veränderlichen getrennt und so vorkommen, dass in der einen Gleichung nur x und y und deren Differentialien, und in der andern nur x und z nebst den Differentialien dieser Variabeln enthalten sind. Doch wenn dies auch nicht der Fall ist, und jede der Gleichungen No. 214 die drei Veränderlichen x, y, z , und die Differentialien zweier derselben enthalten sollte, so können doch immer aus denselben durch Integration zwei Gleichungen gewonnen werden, von denen eine jede die Veränderlichen x, y, z und eine willkürliche Constante enthält. Gesetzt nämlich es seien die Gleichungen

$$Pdy - Qdx = 0,$$

$$Pdz - Rdx = 0,$$

so beschaffen, dass jede derselben die drei Veränderlichen x , y , z enthält, auch habe die dritte Gleichung $Qdz - Rdy = 0$, die aus den beiden vorstehenden folgt, die gleiche Beschaffenheit, so dass also unmittelbar eine Integración nicht möglich ist. Aus der ersten Gleichung folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P},$$

und aus der zweiten folgt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{R}{P}.$$

Differentirt man eine dieser Gleichungen, etwa die erste, so erhält man eine Gleichung in welcher ausser den Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ auch ein Differentialquotient der zweiten Ordnung $\frac{d^2y}{dx^2}$ auftreten wird. Eliminirt man aus dieser Gleichung mit Hülfe

der beiden letzten die Grössen z und $\frac{dz}{dx}$, so kommt man zu

einer Differentialgleichung des zweiten Grades und nur zweier veränderlicher Grössen x und y . Eine solche Gleichung hat, worauf schon früher in der Theorie der singulären Integrale aufmerksam gemacht wurde, zwei Integrale der ersten Ordnung, von denen ein jedes eine willkürliche Constante besitzt. Eliminirt man aus jedem dieser Integrale mit Hülfe der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}$ den Quotienten $\frac{dy}{dx}$, so gelangt man endlich zu zwei Gleichungen, von denen eine jede die Veränderlichen x, y, z und eine willkürliche Constante besitzt.

In speciellen Fällen führt die Anwendung dieser Methode nicht selten zu sehr verwickelten Differentialgleichungen des zweiten Grades, von welchen die Integrale der ersten Ordnung meist nicht herzustellen sind. In diesem Falle sind auch die entsprechenden Differentialgleichungen mit partiellen Differentialien begreiflich nicht integrabel.

174) Die in § 172 entwickelte Methode ist auch auf Differentialgleichungen von mehr als drei Veränderlichen anwendbar.

Gesetzt es soll das Integral der Gleichung

$$P \frac{du}{dx} + Q \frac{du}{dy} + R \frac{du}{dz} = S$$

bestimmt werden, wo P, Q, R, S Functionen von x, y, z, u , bezeichnen.

Es sei

$$f(x, y, z, u) = 0$$

das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung. Es folgt hieraus

$$u = F(x, y, z).$$

Das vollständige Differential dieser Gleichung ist :

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz.$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung und aus der vorgelegten den Quotienten $\frac{du}{dz}$, so erhält man

$$(Rdu - Sdz) + \frac{du}{dx} (Pdz - Rdx) + \frac{du}{dy} (Qdz - Rdy) = 0.$$

Dieser Gleichung geschieht offenbar Genüge durch die Gleichungen

$$Rdu - Sdz = 0,$$

$$Pdz - Rdx = 0,$$

$$Qdz - Rdy = 0,$$

aus welchen durch Elimination von dz nachfolgende Gleichungen erhalten werden:

$$Qdu - Sdy = 0,$$

$$Pdu - Rdx = 0,$$

$$Pdy - Qdx = 0.$$

Durch Integration dreier dieser 6 Gleichungen erhält man drei Gleichungen

$$L = a, M = b, N = c,$$

in welchen L, M, N Functionen von x, y, z, u , und a, b, c willkürliche Constante sind. Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen y und z , so erhält man x , als Function von u, a, b, c , eliminirt man x und z , so erhält man y als Function von u, a, b, c , und eliminirt man x und y , so erhält man den Werth von z in u, a, b, c ausgedrückt. Wenn diese Werthe von x, y, z in $f(x, y, z, u) = 0$ eingeführt werden, so muss u daraus verschwinden.

so dass nur eine Function von a, b, c übrig bleibt. Das gesuchte Integral ist daher

$$\varphi(a, b, c) = 0,$$

oder

$$a = \psi(b, c).$$

175) Es wurde schon im Eingange der Untersuchung der Differentialgleichungen mit partiellen Differentialien bemerkt, dass solche Gleichungen eine gewisse Unbestimmtheit an sich tragen, die auch an dem Integral sich wieder zeigen müsse. In der That führten in allen Fällen die Integrationen zu einer willkürlichen Function oder traten doch in Verbindung mit einer solchen auf. Man kann dies als eine allgemeine Eigenschaft dieser Integrale bezeichnen, denn man kann beweisen, dass, wenn umgekehrt aus einer gegebenen Gleichung dreier Veränderlichen eine Gleichung mit partiellen Differentialien abgeleitet wird, stets eine willkürliche Function, die in der gegebenen Gleichung enthalten ist, zum Verschwinden gebracht werden kann.

Geht man auch hier von einem einfacheren Falle aus, und nimmt man an die gegebene Gleichung sei

$$z = F[\varphi(x, y)],$$

wo F und φ beliebige Functionen bezeichnen, so erhält man durch partielles differentiren

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dF[\varphi(x, y)]}{d\varphi(x, y)} \cdot \frac{d\varphi(x, y)}{dx},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dF[\varphi(x, y)]}{d\varphi(x, y)} \cdot \frac{d\varphi(x, y)}{dy}.$$

Eliminirt man aus beiden den Quotienten $\frac{dF[\varphi(x, y)]}{d\varphi(x, y)}$ so erhält man

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{d\varphi(x, y)}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{d\varphi(x, y)}{dx}$$

eine Gleichung mit partiellen Differentialien, in welcher die willkürliche Function F der gegebenen Gleichung nicht mehr enthalten ist.

Die ganz allgemeine Gleichung

$$F(x, y, z, f[\varphi(x, y, z)]) = 0$$

führt zu einem ähnlichen Resultate. Differentirt man dieselbe in Hinsicht x , und in Hinsicht y , so erhält man folgende Gleichungen:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dF}{df} \cdot \frac{df}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \right) = 0,$$

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{dF}{df} \cdot \frac{df}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \right) = 0,$$

wo der Kürze halber

F statt $F(x, y, z, f[\varphi(x, y, z)])$,

f statt $f[\varphi(x, y, z)]$,

φ statt $\varphi(x, y, z)$

gesetzt ist. Eliminirt man aus den beiden letzten Gleichungen und aus der gegebenen $f[\varphi(x, y, z)]$ und $\frac{df}{d\varphi}$, so erhält man eine Gleichung mit partiellen Differentialen, in welcher die in der vorgelegten Gleichung enthaltene willkürliche Function nicht mehr vorkommt, wornach also die oben aufgestellte Behauptung gerechtfertiget erscheint.

Wenn eine gegebene Gleichung keine willkürliche Function enthält, so kann man doch immer noch nach jener Differentialgleichung mit partiellen Differentialen fragen, welche die gegebene Gleichung zum Integral haben würde. Gesetzt etwa

$$216) \quad f(x, y, z, a, b) = 0$$

sei die gegebene Gleichung, x, y seien die unabhängig Veränderlichen. Differentirt man in Hinsicht einer jeden derselben, so erhält man

$$217) \quad \begin{cases} \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0, \end{cases}$$

wo f der Kürze halber für $f(x, y, z, a, b)$ gesetzt ist.

Eliminirt man aus den Gleichungen No. 216 und 217 die Constanten a und b , so erhält man eine Gleichung mit partiellen Differentialen, die im Allgemeinen die Form

$$218) \quad F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0$$

besitzt, und deren Integral die Gleichung No. 216 ist.

Es sind hier zwei willkürliche Constanten verschwunden, welche in der ursprünglichen Gleichung enthalten waren. Umgekehrt wird daher auch das Integral einer Differentialgleichung mit partiellen Differentialien zwei willkürliche Constanten enthalten müssen. Eben hierauf lässt sich ein Verfahren gründen, welches zu einer weit allgemeineren Lösung führt. Betrachtet man nämlich a und b in *No. 216* selbst als Functionen von x , y , z , zugleich aber b als eine beliebige Function von a , und differentirt man unter dieser Voraussetzung in Hinsicht x und y , so erhält man:

$$219) \quad \begin{cases} \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \left(\frac{df}{da} + \frac{df}{db} \cdot \frac{db}{da} \right) \left(\frac{da}{dx} + \frac{da}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \right) = 0, \\ \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} + \left(\frac{df}{da} + \frac{df}{db} \cdot \frac{db}{da} \right) \left(\frac{da}{dy} + \frac{da}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \right) = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen fallen mit den Gleichungen *No. 217* zusammen, wenn

$$\frac{df}{da} + \frac{df}{db} \cdot \frac{db}{da} = 0$$

wird, d. h. also wenn man a so wählt, dass eben dieser Gleichung Genüge geschieht. Unter eben dieser Voraussetzung erhält man aber, wenn aus *No. 216* und *219* a und b eliminirt werden, die schon oben unter *No. 218* aufgestellte Gleichung mit partiellen Differentialien. Hat man daher für das Integral einer Gleichung mit partiellen Differentialien eine Gleichung mit zwei willkürlichen Constanten

$$f(x, y, z, a, b) = 0$$

gefunden, so erhält man die allgemeinste Form dann, wenn man hierin b gleich einer beliebigen Function von a setzt, und a aus der Gleichung

$$\frac{df}{da} + \frac{df}{db} \cdot \frac{db}{da} = 0$$

bestimmt.

Die hier vorgetragenen allgemeineren Lehrsätze verdankt man Lagrange, der dieselben in seinen *Leçons sur le calcul des fonctions*, Leçon 20 mitgetheilt hat.

Vierte Abtheilung.

Integration der Differentialformeln des zweiten Grades und höherer Grade mit mehreren unabhängig Veränderlichen.

176) Wenn eine Differentialformel $Pdx + Qdy$ durch Differentiation einer Function von x und y entstanden ist, so haben P und Q immer eine solche Beschaffenheit dass $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ wird.

Es wurde desshalb schon in §. 163 hervorgehoben, dass rückwärts von dem Integral einer Differentialformel mit zwei Veränderlichen nur dann die Rede sein könne, wenn für P und Q die Gleichung $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ Statt findet. Es ist nun ebenso für Differentialgleichungen des zweiten Grades festzustellen, unter welcher Bedingung dieselben als integrabel zu betrachten sind.

Gesetzt es sei z eine Function von x, y . Es ist hiernach

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy,$$

$$220) d^2z = \frac{d^2z}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2z}{dx dy} dx dy + \frac{d^2z}{dy^2} dy^2.$$

Differentirt man den partiellen Differentialquotienten $\frac{d^2z}{dx^2}$ in Hinsicht y , so erhält man $\frac{d^3z}{dy dx^2}$, und differentirt man den Quotienten $\frac{d^2z}{dx dy}$ in Hinsicht x , so hat man $\frac{d^3z}{dx^2 dy}$. Nach §. 19 ist aber

$$\alpha) \frac{d^3z}{dy dx^2} = \frac{d^3z}{dx^2 dy}.$$

Auf gleiche Weise erhält man, wenn $\frac{d^2z}{dx dy}$ in Hinsicht y und $\frac{d^2z}{dy^2}$ in Hinsicht x differentirt wird

$$\beta) \frac{d^3z}{dx dy} = \frac{d^3z}{dy^2 dx}.$$

Es geht hieraus rückwärts hervor, dass eine Differentialformel des zweiten Grades nur dann ein exactes Differential und daher auch nur dann integrabel ist, wenn sie die durch (α) und (β) ausgesprochenen Bedingungen erfüllt.

Gesetzt etwa es sei

$$d^2z = Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2$$

die gegebene Differentialformel des zweiten Grades, wo P, Q, R Functionen von x, y bezeichnen. Die Gleichungen (α) und (β) gehen hiernach in folgende über:

$$221) \quad \begin{cases} \frac{dP}{dy} = \frac{1}{2} \frac{dQ}{dx}, \\ \frac{dR}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dQ}{dy}. \end{cases}$$

Werden diese Bedingungen nicht erfüllt, so kann von einem Integral der vorgelegten Formel nicht die Rede sein, denn es giebt keine Function von x, y durch deren wiederholte Differentiation jene Formel entstanden sein kann.

Es ist nicht schwierig diese Betrachtungen auf Differentialformeln des dritten, des vierten und höherer Grade auszudehnen, und somit für jene Gleichungen zu bezeichnen, die erfüllt sein müssen, wenn die vorgelegte Formel ein exactes Differential sein soll. So erhält man für eine Formel des dritten Grades

$$d^3z = Pdx^3 + Qdx^2dy + Rdx dy^2 + Sdy^3$$

folgende Gleichungen:

$$222) \quad \frac{dP}{dy} = \frac{1}{2} \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dQ}{dy} = \frac{dR}{dx}, \quad \frac{1}{2} \frac{dR}{dy} = \frac{dS}{dx},$$

die Statt finden müssen, wenn die vorgelegte Formel überhaupt integrabel sein soll.

Für eine Formel des vierten Grades

$$d^4z = Pdx^4 + Qdx^3dy + Rdx^2dy^2 + Sdx dy^3 + Tdy^4$$

sind die vier Gleichungen

$$223) \quad \begin{cases} \frac{dP}{dy} = \frac{1}{3} \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{1}{3} \frac{dQ}{dy} = \frac{1}{6} \frac{dR}{dx}, \\ \frac{1}{6} \frac{dR}{dy} = \frac{1}{4} \frac{dS}{dx}, \quad \frac{1}{4} \frac{dS}{dy} = \frac{dT}{dx}, \end{cases}$$

die Bedingungsgleichungen der Integrabilität u. s. w.

177) Die Integration der Differentialformeln des zweiten, des dritten und überhaupt höherer Grade, welche den im vorhergehenden § aufgestellten Bedingungen Genüge leisten, erfolgt im Allgemeinen so, dass von einer Differentialformel einer

höheren Ordnung zu der um eine Einheit niederen Ordnung fortgegangen wird, bis man endlich die primitive Formel erreicht.

Es sei z. B. eine Formel $Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2$ des zweiten Grades, in welcher die Functionen P, Q, R den unter No. 221 aufgestellten Gleichungen genügen, zu integriren.

Gesetzt es sei z das gesuchte Integral, so dass man hat

$$d^2z = Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2.$$

Es ist:

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy,$$

$$d \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} dx + \frac{d^2z}{dxdy} dy,$$

$$d \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{d^2z}{dy^2} dy + \frac{d^2z}{dxdy} dx,$$

folglich:

$$224) \quad z = \int \left(\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy \right),$$

$$\frac{dz}{dx} = \int \left(\frac{d^2z}{dx^2} dx + \frac{d^2z}{dxdy} dy \right),$$

$$\frac{dz}{dy} = \int \left(\frac{d^2z}{dy^2} dy + \frac{d^2z}{dxdy} dx \right).$$

Da die vorgelegte Formel ein exactes Differential ist, so hat man $P = \frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{Q}{2} = \frac{d^2z}{dxdy}$, $R = \frac{d^2z}{dy^2}$. Es wird hierdurch

$$\frac{dz}{dx} = \int \left(Pdx + \frac{Q}{2} dy \right),$$

$$\frac{dz}{dy} = \int \left(Rdy + \frac{Q}{2} dx \right).$$

Betrachtet man in der ersten dieser Gleichungen y , und in der zweiten x als constant, so hat man:

$$\frac{dz}{dx} = \int Pdx + Y,$$

$$\frac{dz}{dy} = \int Rdy + X,$$

wo Y, X Functionen von y, x bezeichnen. Differentirt man in Hinsicht y , und in Hinsicht x , so erhält man:

$$\frac{d^2z}{dxdy} = \int \frac{dP}{dy} dx + \frac{dY}{dy} = \frac{Q}{2},$$

$$\frac{d^2z}{dydx} = \int \frac{dR}{dx} dy + \frac{dX}{dx} = \frac{Q}{2}.$$

Es folgt hieraus:

$$Y = \int \left(\frac{Q}{2} - \int \frac{dP}{dy} dx \right) dy,$$

$$X = \int \left(\frac{Q}{2} - \int \frac{dR}{dx} dy \right) dx.$$

Hierdurch wird:

$$225) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dx} = \int P dx + \int \left(\frac{Q}{2} - \int \frac{dP}{dy} dx \right) dy, \\ \frac{dz}{dy} = \int R dy + \int \left(\frac{Q}{2} - \int \frac{dR}{dx} dy \right) dx. \end{cases}$$

Führt man diese Werthe in No. 224 ein, so erhält man:

$$z = \int \left[\left(\int P dx + \int \left(\frac{Q}{2} - \int \frac{dP}{dy} dx \right) dy \right) dx + \left(\int R dy + \int \left(\frac{Q}{2} - \int \frac{dR}{dx} dy \right) dx \right) dy \right].$$

Beispiel.

Es soll das Integral der Formel:

$$d^2z = \left(12x^2y^3 - \frac{1}{x^2} \right) dx^2 + 24x^3y^2 dx dy + \left(6x^4y - \frac{1}{y^2} \right) dy^2$$

bestimmt werden.

Hier ist:

$$P = 12x^2y^3 - \frac{1}{x^2}, \quad \frac{dP}{dy} = 36x^2y^2,$$

$$Q = 24x^3y^2, \quad \frac{dQ}{dx} = 72x^2y^2, \quad \frac{dQ}{dy} = 48x^3y,$$

$$R = 6x^4y - \frac{1}{y^2}, \quad \frac{dR}{dx} = 24x^3y,$$

folglich

$$\frac{dP}{dy} = \frac{1}{2} \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dR}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dQ}{dy},$$

die vorgelegte Differentialformel ist daher ein exactes Differential.

Nach den Gleichungen No. 225 ist:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \int \left(12x^2y^3 - \frac{1}{x^2} \right) dx + \int \left(12x^3y^2 - \int 36x^2y^2 dx \right) dy \\ &= 4x^3y^3 + \frac{1}{x} + C_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dy} &= \int \left(6x^4y - \frac{1}{y^2} \right) dy + \int \left(12x^3y^2 - \int 24x^3y dy \right) dx \\ &= 3x^4y^2 + \frac{1}{y} + C_2. \end{aligned}$$

Es ist aber:

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy,$$

daher:

$$\begin{aligned} z &= \int \left(\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy \right) \\ &= \int \left[\left(4x^3y^3 + \frac{1}{x} + C_1 \right) dx + \left(3x^4y^2 + \frac{1}{y} + C_2 \right) dy \right]. \end{aligned}$$

Dieses Integral wird nach den in §. 163 gegebenen Regeln bestimmt. Man findet für dasselbe

$$z = x^4y^3 + \lg xy + C_1x + C_2y + C_3,$$

wo C_1, C_2, C_3 willkürliche Constanten bezeichnen.

178) Die Integration der Differentialgleichungen mit partiellen Differentialen höherer Ordnungen bildet auch hier, wie im vorhergehenden Abschnitte, den schwierigeren aber auch wichtigeren Theil der Untersuchung. Es führen namentlich mehrere Probleme der mathematischen Physik, die Theorie der Bewegung der Wärme in festen Körpern und überhaupt die Untersuchungen der analytischen Mechanik auf Gleichungen dieser Art, so dass die Entwicklung gewisser allgemeiner Gesetze geradezu von der Integration dieser Gleichungen abhängig ist.

Auch hier soll mit den einfacheren Fällen begonnen werden. Gesetzt es sei das Integral der Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} = P$$

zu bestimmen, wo z eine Function von x, y und P eine Function von x ist.

Durch eine erste Integration erhält man

$$\frac{dz}{dx} = \int P dx + Y,$$

wo Y eine beliebige Function von y bezeichnet.

Integrirt man von Neuem, so findet man:

$$z = \int \left(\int P dx \right) dx + xY + Y_1,$$

wo auch Y_1 eine beliebige Function von y ausdrückt.

Ist in einem anderen Falle P eine Function von x, y , so hat man auch hier wie oben

$$\frac{dz}{dx} = \int P dx + Y,$$

$$z = \int \left(\int P dx \right) dx + xY + Y_1.$$

Wenn die zu integrierende Gleichung die Form

$$\frac{d^2z}{dx dy} = P$$

hat, wo P eine Function von x, y bezeichnet, so ist in Hinsicht x und darauf in Hinsicht y zu integrieren. Man erhält durch die erste Integration

$$\frac{dz}{dy} = \int P dx + Y,$$

und hieraus durch eine zweite Integration

$$z = \int (P dx + Y) dy + X,$$

wo X eine beliebige Function von x , und Y eine beliebige Function von y ist.

Es treten also in all diesen Fällen zwei neue willkürliche Functionen auf, so wie früher die Integration der Differentialgleichungen mit partiellen Differentialen des ersten Grades immer zu einer willkürlichen Function führte.

178) Die Aufgabe wird etwas allgemeiner, wenn die zu integrierende Gleichung die Form

$$226) \quad \frac{d^2z}{dx^2} + P \frac{dz}{dx} = Q$$

besitzt, wo P und Q wieder Functionen von x und y bezeichnen.

Es ist nach §. 177

$$227) \quad d \frac{dz}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} dx + \frac{d^2z}{dx dy} dy$$

Die vorgelegte Gleichung sagt nur aus: die Beschaffenheit von z sei der Art, dass

$$\frac{d^2z}{dx^2} = Q - P \frac{dz}{dx}$$

ist, während der Quotient $\frac{d^2z}{dx dy}$ ganz unbestimmt bleibt, und daher nach Belieben gewählt werden darf. Führt man den

Werth von $\frac{d^2z}{dx^2}$ in No. 227 ein, so erhält man:

$$d \frac{dz}{dx} = \left(Q - P \frac{dz}{dx} \right) dx + \frac{d^2z}{dx dy} dy.$$

Setzt man hierin $\frac{dz}{dx} = u$, so wird

$$du = (Q - Pu) dx + \frac{du}{dy} dy.$$

Betrachtet man y als constant, so hat man

$$du = (Q - Pu) dx.$$

Diese Gleichung ist eine lineare Differentialgleichung des ersten Grades, deren Integral nach §. 121 sich in folgender Weise ergibt

$$u = e^{-\int P dx} \left(\int e^{\int P dx} Q dx + Y \right).$$

Die Constante Y drückt auch hier, wie leicht einzusehen ist, eine beliebige Function von y aus.

Um endlich z zu bestimmen, ist nur nöthig das Integral von

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$$

herzustellen. Da nach der vorgelegten Aufgabe nur der Werth von $\frac{dz}{dx} = u$ bestimmt ist, der Quotient $\frac{dz}{dy}$ dagegen beliebig gewählt werden kann, so hat man

$$228) \quad z = \int \left[e^{-\int P dx} \left(\int e^{\int P dx} Q dx + Y \right) \right] + Y_1,$$

wo auch Y_1 eine beliebige Function von y bezeichnet.

Auf eine ganz analoge Weise ist zu verfahren, wenn es sich um die Herstellung der Integrale der Gleichungen

$$\frac{d^2z}{dy^2} + P \frac{dz}{dy} = Q, \quad \frac{d^2z}{dx dy} + P \frac{dz}{dx} = Q, \quad \frac{d^2z}{dx dy} + P \frac{dz}{dy} = Q,$$

handelt, wo P und Q beliebige Functionen von x, y sind.

179) Es sei ferner das Integral der Gleichung

$$229) \quad \frac{d^2z}{dx^2} + P \frac{d^2z}{dx dy} = Q$$

herzustellen, wo wieder P, Q beliebige Functionen von x, y bezeichnen.

Es ist:

$$d \frac{dz}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} dx + \frac{d^2z}{dx dy} dy,$$

$$d \frac{dz}{dy} = \frac{d^2z}{dy^2} dy + \frac{d^2z}{dx dy} dx.$$

Setzt man $\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q,$

daher:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dp}{dx}, \quad \frac{d^2z}{dx dy} = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{dq}{dy},$$

so erhält man:

$$\alpha) \quad dp = \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy,$$

$$\beta) \quad dq = \frac{dq}{dy} dy + \frac{dq}{dx} dx,$$

und die vorgelegte Gleichung geht in folgende über:

$$\frac{dp}{dx} + P \frac{dp}{dy} = Q.$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung und aus der Gleichung (α) den Quotienten $\frac{dp}{dx}$, so erhält man:

$$dp = \left(Q - P \frac{dp}{dy} \right) dx + \frac{dp}{dy} dy,$$

daher:

$$dp - Qdx + \frac{dp}{dy} (Pdx - dy) = 0.$$

Dieser Gleichung geschieht offenbar Genüge durch die Annahme

$$dp - Qdx = 0,$$

$$Pdx - dy = 0.$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt $f(x, y) = C$. Es ist daher $y = \varphi(x, C)$. Führt man diesen Werth von y in der andern Gleichung ein und integrirt man hierauf, so erhält man

$$p = \int Qdx + \psi(C).$$

Zur Bestimmung von q dient die Gleichung (β). Es ist in derselben nur der Werth des Quotienten $\frac{dq}{dx}$ durch die vorgelegte Aufgabe näher bestimmt, es ist nämlich $\frac{dq}{dx} = \frac{dp}{dy}$; der andere Quotient ist ganz unbestimmt gelassen, und kann eine beliebige Function von x, y bezeichnen. Integrirt man unter diesen Voraussetzungen die Gleichung (β), so erhält man

$$q = \int \frac{dp}{dy} dx + Y,$$

wo Y eine beliebige Function von y bezeichnet.

Die ursprüngliche Function z wird erhalten, wenn in der Gleichung $dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$ oder $dz = p dx + q dy$ die Werthe von p und q eingeführt werden, und hierauf nach in vorhergehendem Abschnitte gegebenen Regeln integrirt wird.

189) Die allgemeinste Form einer Differentialgleichung mit partiellen Differentialien des zweiten Grades ist

$$\frac{d^2z}{dx^2} + P \frac{d^2z}{dx dy} + Q \frac{d^2z}{dy^2} + R \frac{dz}{dx} + S \frac{dz}{dy} + T = 0$$

wo P, Q, R, S, T irgend welche Functionen von x, y, z bezeichnen. In dieser Allgemeinheit lässt sich die Aufgabe nicht lösen, es giebt aber einen speciellen immerhin noch ziemlich umfassenden Fall, in welchem die Integration gelingt. Bezeichnen nämlich $A_1, A_2, A_3, \dots$ constante Grössen, so kann das Integral der Gleichung

$$230) A_1 \frac{d^2z}{dx^2} + A_2 \frac{d^2z}{dx dy} + A_3 \frac{d^2z}{dy^2} + A_4 \frac{dz}{dx} + A_5 \frac{dz}{dy} + z = 0$$

immer bestimmt werden.

Ein partikulares Integral dieser Gleichung ist offenbar

$$z = Ce^{\alpha x + \beta y}$$

wenn nur die Constanten α, β so gewählt werden, dass sie der Gleichung

$$231) A_1 \alpha^2 + A_2 \alpha \beta + A_3 \beta^2 + A_4 \alpha + A_5 \beta + 1 = 0$$

Genüge leisten. Da hier nur eine Gleichung zur Bestimmung der Constanten α, β vorliegt, so kann die eine willkürlich gewählt werden. Es giebt also unendlich viele Werthe von α und β die der vorgeschriebenen Bedingung Genüge leisten.

Gesetzt $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \dots$ u. s. w. seien solche zusammengehörige Werthe der Constanten, welche der Gleichung No. 231 genügen, so sind auch die Gleichungen

$$z = C_1 e^{\alpha_1 x + \beta_1 y}, z = C_2 e^{\alpha_2 x + \beta_2 y}, \text{ u. s. w.}$$

partikuläre Integrale der vorgelegten Differentialgleichung.

Es ist hiernach leicht einzusehen, dass auch die Gleichung

$$232) z = Ce^{\alpha x + \beta y} + C_1 e^{\alpha_1 x + \beta_1 y} + C_2 e^{\alpha_2 x + \beta_2 y} + \dots$$

ein Integral von No. 230 ist. Es ist aber überdiess eben diese Gleichung auch das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung, wofern nur für $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots$ alle möglichen Werthe gesetzt sind, welche die Gleichung No. 231 zulässt. Durch $C, C_1, C_2, \dots$ sind ganz willkürliche Constanten bezeichnet.

Variationsrechnung.

180) Die Probleme über Maxima und Minima sind für die analytischen Forschungen in mehr als einer Beziehung von besonderer Wichtigkeit. Sie sind es, welche zu einer sehr schönen Anwendung des Differentialcalculus führten, wie dies in §. 33 u. f. gezeigt wurde, sie sind es ferner, die zu einer neuen Rechnungsmethode oder doch zu einer merkwürdigen Erweiterung der Differentialrechnung, zur Variationsrechnung, Veranlassung gaben.

In den früher behandelten Fragen über Maxima und Minima kam es wesentlich darauf an, den Werth oder die Werthe einer Veränderlichen zu bestimmen, durch welche eine gegebene Function eben dieser Veränderlichen zu einem Maximum oder Minimum wird. Man kann die Frage nach einem Maximum und Minimum von einem ganz andern Gesichtspunkte aus stellen. Man kann die Function der Veränderlichen als nicht bekannt, als unbestimmt voraussetzen, und kann verlangen dass jene Function bestimmt werde, durch welche der oder jener Ausdruck ein Maximum oder Minimum erreiche. So ist z. B. bekannt, dass $\int_a^\beta \sqrt{dx^2 + dy^2}$ die Länge des Bogens einer beliebigen ebenen Curve innerhalb der Grenzen $x = \alpha$, und $x = \beta$ ausdrückt; man kann fragen, welche eine Gleichung zwischen x und y , oder welche Function y von x sein müsse, damit der Ausdruck $\int_a^\beta \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ein Minimum werde. In einem andern Falle kann verlangt werden, dass von allen ebenen Curven jene bestimmt werde, welche bei gleichem Umfange den grössten Flächenraum

einschliesse. Diese Aufgabe lässt sich auch in folgender Weise ausdrücken. Der Flächeninhalt einer ebenen Curve innerhalb der Grenzen α, β ist: $\int_{\alpha}^{\beta} y dx$, und die Länge dieser Curve für die gleichen Grenzen ist $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Es soll nun jene Gleichung zwischen x und y hergestellt werden, durch welche der Ausdruck $\int_{\alpha}^{\beta} y dx$, unter der Voraussetzung dass $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ constant ist, ein Maximum werde. Diese Aufgabe bezeichnet zugleich einen der einfacheren Fälle der berühmten isoperimetrischen Probleme.

Die Aufgaben werden weit allgemeiner, wenn die Grenzen der Integrale selbst als variabel gedacht werden. So kann z. B. nach jener Curve gefragt werden, die zwei gegebene Curven mit einander verbindet, und deren Länge zwischen diesen Curven ein Minimum ist. Diese Aufgabe lässt sich auch in folgender Weise ausdrücken: es soll y als eine solche Function von x bestimmt werden, dass das Integral $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ zu einem Minimum werde. x_0, x_1 sind in der Art variable Grenzen, dass sie die Abscissen beliebiger Punkte der gegebenen Curven bezeichnen.

Für die Untersuchungen der analytischen Mechanik wird die Lösung ähnlicher Aufgaben von noch grösserer Wichtigkeit. Auch war es in der That ein Problem der Mechanik, nämlich das der Brachystochone, oder der Linie des schnellsten Falles, welches zuerst zu einer Untersuchung der Maxima und Minima in dem angegebenen Sinne hinführte. Joh. Bernoulli hat dieses Problem vorgelegt, und hat hiermit nicht allein den ersten Anstoss zur Lösung einer Reihe ähnlicher Probleme gegeben, sondern zugleich die Begründung einer neuen Rechnungsmethode veranlasst. Es waren im Anfange namentlich die isoperimetrischen Probleme, deren Lösungen zur Ausbildung des neuen Calculs beitrugen, bis endlich Euler, der in einer Reihe von Abhandlungen in den Petersburger Commentarien immer

auf denselben Gegenstand zurückkommt und ihn successiv weiter führt, den Zusammenhang des Princips der neuen Rechnungsmethode mit dem Princip der Differentialrechnung auf das Klarste herausstellte (Nov. Comment. Acad. Petropolitanae. Tom. XVI). Doch hat man auch hierin, wie in den meisten analytischen Forschungen, dem tief philosophischen Geiste eines Lagrange die allgemeinere Begründung, die Aufstellung eines umfassenden Algorithmus und die Entwicklung der allgemeinsten Gesetze und Gleichungen zu verdanken (Mémoires de l'Académie de Turin. Tome II).

181) Es wurden im Vorhergehenden nur die Probleme angedeutet, deren Lösung zur Erfindung und Entwicklung der Variationsrechnung führten. Es kömmt nun darauf an, den Ideen- gang zu bezeichnen, der in der Lösung jener Probleme festzuhalten ist. Der Hauptsache nach fällt er ganz mit dem zusammen, welcher im fünften Abschnitte der Differentialrechnung die Basis der Theorie der Maxima und Minima bildet.

Gesetzt nämlich es sei

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) dx$$

ein Ausdruck, für welchen y als eine solche Function von x bestimmt werden soll, dass eben jener Ausdruck ein Maximum oder Minimum werde, auch sei $y = F(x)$ jene Function, durch welche der Aufgabe Genüge geschieht,

Setzt man $F(x)$, $\frac{dF(x)}{dx}$, $\frac{d^2F(x)}{dx^2}$, ... an die Stelle von y , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... und führt man hierauf die Integration aus, so erhält man im Allgemeinen

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) = \varphi(\alpha, \beta).$$

Ist nun ferner $F_1(x)$ eine Function, die nur unendlich wenig von $F(x)$ verschieden ist, und führt man auch diesen Werth von y , so wie die Werthe der Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... die sich aus $z = F_1(x)$ ergeben, in der vorgelegten Formel ein, so wird man, nachdem auch hier die Integration ausgeführt wurde,

einen Werth erhalten, der nur um unendlich wenig von dem früheren $\varphi(\alpha, \beta)$ abweicht. Man bezeichnet die verschwindend klein werdende Differenz, die man auf diesem Wege erhält, durch den griechischen Buchstaben δ , und nennt $\delta\varphi(\alpha, \beta)$ die Variation der Function $\varphi(\alpha, \beta)$.

Soll durch $y=F(x)$ der vorgelegte Ausdruck ein Maximum oder Minimum werden, so muss durch jede andere Relation zwischen x und y in dem einen Falle ein kleinerer, in dem andern Falle ein grösserer Werth erhalten werden. Dies ist aber nach den Grundsätzen, die in der Theorie der Maxima und Minima dargelegt wurden, nur dann möglich, wenn es eine Relation zwischen x und y giebt, durch welche

$$\delta \int_a^\beta f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) dx = 0$$
 wird, und durch welche zugleich

$$\delta^2 \int_a^\beta f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) dx$$
 nicht Null wird, oder allgemeiner für welche die erste nicht verschwindende Variation von gerader Ordnung ist.

182) Die Aufgabe, um deren Lösung es sich hiernach zunächst handelt, besteht in der Bestimmung der Variation eines Integrals. Die Variationsrechnung legt sich aber die Aufgabe in einem allgemeineren Sinne vor, sie bestimmt die Variation eines beliebigen Ausdruckes mit einer beliebigen Zahl von Veränderlichen.

Es wurde schon oben bemerkt, dass unter einer Variation die verschwindend klein werdende Aenderung einer Function als solcher verstanden wird. Ist z. B. $u=f(x)$, und ist ferner $f_1(x)$ eine nur um unendlich wenig von $f(x)$ abweichende Function von x , so ist

$$\delta u = f_1(x) - f(x).$$
 Ist $u=f(x, y, z, \dots)$, so ist unter den gleichen Verhältnissen

233)
$$\delta u = f_1(x, y, z, \dots) - f(x, y, z, \dots).$$

Man kann sich die Aenderung der Function dadurch bewirken denken, dass entweder die eine oder andere der Veränderlichen

oder dass jede derselben als Function einer neuen Grösse betrachtet wird, und dass man eben dieser Grösse Aenderungen beilegt, die man zur Erzeugung der Variation, gerade so wie in der Differentialrechnung, verschwindend klein werden lässt.

Es soll z. B. die Variation von $u=f(x)$ bestimmt werden. Man setze $x=\varphi(a)$ und bezeichne die endliche noch nicht verschwindend klein werdende Aenderung durch D , so hat man

$$\begin{aligned} Du &= f[\varphi(a) + D\varphi(a)] - f[\varphi(a)] \\ &= \frac{f[\varphi(a) + D\varphi(a)] - f[\varphi(a)]}{D\varphi(a)} \cdot D\varphi(a). \end{aligned}$$

In dem speciellen Falle, in welchem die Aenderung $D\varphi(a)$ verschwindend klein wird, ein Fall der dadurch kenntlich gemacht wird, dass man δ statt D setzt, geht der Bruch des obigen Ausdruckes in den Differentialquotienten von $f[\varphi(a)]$, in Hinsicht $\varphi(a)$ genommen, über. Man erhält daher, wenn man zugleich wieder x für $\varphi(a)$ restituiert

$$\delta u = \frac{df(x)}{dx} \delta x.$$

Ist $u=f(x, y, z, \dots)$, so ist allgemein

$$234) \quad \delta u = \frac{df}{dx} \delta x + \frac{df}{dy} \delta y + \frac{df}{dz} \delta z + \dots,$$

wo zur Abkürzung f statt $f(x, y, z, \dots)$ gesetzt ist.

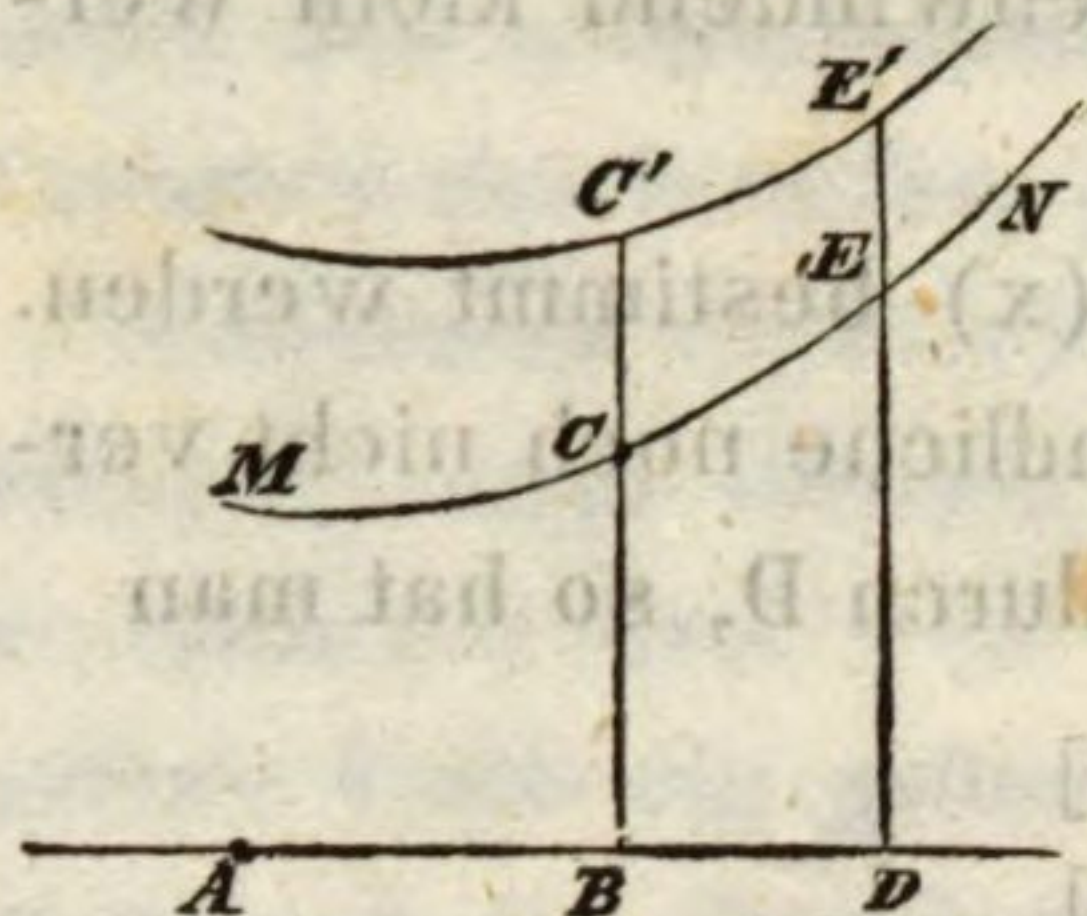
Dem Princip nach fällt also das Variiren mit dem Differentiren zusammen, es ist ein Differentiren in Hinsicht einer neuen Variablen, von welcher die gegebenen Veränderlichen abhängig gedacht werden.

Wenn noch allgemeiner V irgend eine Function von $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ ausdrückt, so erhält man:

$$235) \quad \delta V = \frac{dV}{dx} \delta x + \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dp} \delta p + \frac{dV}{dq} \delta q + \dots;$$

hier ist zur Abkürzung $p, q \dots$ statt $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ gesetzt.

183) Geometrische Betrachtungen sind sehr geeignet die Bedeutung der Variationen anschaulich zu machen. Es sei $y = f(x)$ die Gleichung der ebenen Curve MN. Die Ordinaten eines Punktes C derselben seien $AB = x$, $BC = y$. Nimmt AB um $BD = h$ zu, so kömmt man zu einem Punkt E der Curve, dessen Ordinate ED durch $f(x+h)$ bestimmt ist. Durch successive Aenderung von x werden also die verschiedenen Punkte der Curve $y = f(x)$ erhalten.



Lässt man aber y sich ändern, während x ungeändert bleibt, so dass für $AB = x$ eine Ordinate BC' , und für $x + h$ eine Ordinate DE' u. s. w. erhalten wird, so gelangt man zu einer neuen Curve, die um so weniger von der gegebenen abweicht, je kleiner die Unterschiede $BC' - BC$, $DE' - DE$, u. s. w. werden. Eben diese Unterschiede sind für den Fall, dass sie verschwindend klein werden die Variationen von y .

Während also eine Zunahme von x um Δx zu einem späteren Punkte derselben Curve führt, geht man durch eine Variation d. h. durch eine Aenderung von $f(x)$ zu einer ganz anderen Curve über.

184) Bevor die Variationen für einzelne Fälle dargelegt werden, ist es zweckmässig einige allgemeine Sätze voranzustellen, die für den späteren Calcul um so wichtiger sind, als durch sie eine gewisse Freiheit in der Aufeinanderfolge der Rechnungsoperationen begründet wird.

Es ist $\delta(V + dV) = \delta V + \delta dV$, folglich

$$\delta dV = \delta(V + dV) - \delta V.$$

Nimmt man das Differential von δV , so lässt man V in $V + dV$ übergehen und zählt δV ab, man erhält also:

$$d\delta V = \delta(V + dV) - \delta V.$$

Es ist daher:

$$236) \quad \delta dV = d\delta V.$$

Die geometrische Betrachtung macht auch dieses Resultat

anschaulich. Bezeichnet man durch D die noch nicht verschwindend kleine Variation, so wie durch Δ die endliche Differenz bezeichnet wird, so hat man nach der Figur des vorhergehenden §

$$D\Delta y = D(ED - CB) = E'D - ED - C'B + CB,$$

$$\Delta Dy = \Delta(C'B - CB) = E'D - C'B - ED + CB,$$

es ist daher:

$$D\Delta y = \Delta Dy.$$

Geht man zur Grenze über, für welche δ für D und d für Δ zu setzen ist, so erhält man wie früher

$$236) \quad \delta dy = d\delta y.$$

Es ist also gleichgültig ob man zuerst eine Function variirt und darauf differentirt, oder ob man zuerst differentirt und darauf variirt.

Nach No. 236 hat man sogleich weiter

$$\delta d^2 V = d\delta dV = d^2\delta V,$$

und allgemein

$$237) \quad \delta d^n V = d^n \delta V.$$

Gesetzt es sei ferner:

$$V = \int U.$$

Es ist hiernach:

$$\alpha) \quad \delta V = \delta \int U,$$

und

$$dV = U.$$

Variirt man diese letzte Gleichung, so erhält man:

$$\delta dV = \delta U,$$

daher:

$$d\delta V = \delta U,$$

folglich:

$$\beta) \quad \delta V = \int \delta U.$$

Aus den Gleichungen (α) und (β) folgt:

$$238) \quad \delta \int U = \int \delta U.$$

Hiernach ist sogleich weiter

$$\delta \iint U = \int \delta \int U = \iint \delta U,$$

$$\delta \iiint U = \iiint \delta U,$$

u. s. w.

Es ist also auch gleichgültig, ob man zuerst integriert und dann variirt, oder ob man zuerst variirt und dann integriert.

185) Nach diesen Vorbereitungen soll nun endlich zur Entwicklung der Variationen im Einzelnen fortgegangen werden.

Die Variation eines Ausdruckes, welcher keine Differentialquotienten und keine Integralformeln enthält, hat keine Schwierigkeit, denn es sind, wie aus §. 182 hervorgeht, dieselben Regeln wie in der Differentialrechnung in Anwendung zu bringen, indem es sich in der That auch nur um ein Differentiren aus einem andern Gesichtspunkte handelt. Sollte z. B. die Variation von $V = ay^2 + bx^3$ bestimmt werden, so hat man

$$\delta V = 2ay\delta y + 3bx^2\delta x,$$

wo δy und δx wenn auch verschwindend klein werdende Größen doch nicht mit dy und dx zu verwechseln sind, indem ihnen die in §. 182 angegebene Bedeutung zukömmt.

Wenn der zu variirende Ausdruck beliebige Differentialquotienten enthält, so bleibt die Regel des Variirens, wie ebenfalls in §. 182 gezeigt wurde, ungeändert. So ist

$$m) \quad \delta V = \frac{dV}{dx} \delta x + \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dp} \delta p + \frac{dV}{dq} \delta q + \dots,$$

wo $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, ... und V gleich irgend einer Function von $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ ist. Dieser Ausdruck kann durch eine weitere Analyse der Variationen $\delta p, \delta q, \dots$ in eine andere Form gebracht werden, welche namentlich in den später zu behandelnden Problemen über Maxima und Minima von besonderer Wichtigkeit ist.

Es ist:

$$\delta p = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{dx \delta dy - dy \delta dx}{dx^2}$$

$$= \frac{d\delta y}{dx} - p \frac{d\delta x}{dx}$$

$$= \frac{d(\delta y - p\delta x)}{dx} + q\delta x,$$

$$\delta q = \delta \frac{dp}{dx} = \frac{d\delta p}{dx} - q \frac{d\delta x}{dx}$$

$$= \frac{d^2(\delta y - p\delta x)}{dx^2} + r\delta x,$$

$$\delta r = \delta \frac{dq}{dx} = \frac{d(\delta q - r\delta x)}{dx} + s\delta x$$

$$= \frac{d^2(\delta y - p\delta x)}{dx^2} + s\delta x,$$

u. s. w.

Führt man diese Werthe in der Gleichung (m) ein, so erhält man, wenn man zugleich beachtet dass $\delta y = (\delta y - p\delta x) + p\delta x$ ist,

$$239) \quad \delta V = \left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy} p + \frac{dV}{dp} q + \dots \right) \delta x$$

$$+ \frac{dV}{dy} (\delta y - p\delta x)$$

$$+ \frac{dV}{dp} \frac{d(\delta y - p\delta x)}{dx}$$

$$+ \frac{dV}{dq} \frac{d^2(\delta y - p\delta x)}{dx^2}$$

$$+ \dots$$

186) Wenn V ausser $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ auch $z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots$ enthält, wo nur x die unabhängig Veränderliche ist, und z wie y als unbestimmte Functionen von x zu betrachten sind, so hat man, wenn wieder $p = \frac{dy}{dx}, q = \frac{d^2y}{dx^2} \dots$ und $p_1 = \frac{dz}{dx}, q_1 = \frac{d^2z}{dx^2} \dots$ gesetzt wird,

$$\delta V = \frac{dV}{dx} \delta x + \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dp} \delta p + \frac{dV}{dq} \delta q + \dots$$

$$+ \frac{dV}{dz} \delta z + \frac{dV}{dp_1} \delta p_1 + \frac{dV}{dq_1} \delta q_1 + \dots$$

Eine ähnliche Analyse der Variationen $\delta p, \delta q, \delta r, \dots, \delta p_1, \delta q_1, \delta r_1, \dots$ führt hier zu folgender Gleichung:

$$240) \quad \delta V = \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy} p + \frac{dV}{dp} q + \dots \\ + \frac{dV}{dz} p_1 + \frac{dV}{dp_1} q_1 + \dots \end{array} \right\} \delta x$$

$$+ \frac{dV}{dy} (\delta y - p\delta x) + \frac{dV}{dp} \frac{d(\delta y - p\delta x)}{dx} + \dots$$

$$+ \frac{dV}{dz} (\delta z - p_1\delta x) + \frac{dV}{dp_1} \frac{d(\delta z - p_1\delta x)}{dx} + \dots$$

187) Geht man zu einer noch allgemeineren Aufgabe über, und nimmt man an die zu variirende Formel habe zwei unabhängig Veränderliche und eine abhängig Veränderliche nebst

den Differentialquotienten verschiedener Ordnungen, so dass man hat:

$$V = F \left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx dy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \dots \right)$$

oder:

$$V = F(x, y, z, p, q, r, s, t, \dots)$$

$$\text{wo } p = \frac{dz}{dx}, q = \frac{dz}{dy}, r = \frac{d^2z}{dx^2}, \dots$$

Es ist:

$$241) \quad \delta V = \frac{dV}{dx} \delta x + \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dz} \delta z + \frac{dV}{dp} \delta p + \frac{dV}{dq} \delta q + \dots$$

Die Analyse der Variationen $\delta p, \delta q, \dots$ führt hier zu folgenden Gleichungen:

$$\delta p = \delta \frac{dz}{dx} = \frac{d(\delta z - p \delta x)}{dx} + \frac{dp}{dx} \delta x$$

$$= \frac{d(\delta z - p \delta x)}{dx} + y \delta x,$$

$$\delta q = \delta \frac{dz}{dy} = \frac{d(\delta z - q \delta y)}{dy} + t \delta y,$$

$$\delta r = \delta \frac{dp}{dx} = \frac{d\delta p}{dx} - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{d\delta x}{dx},$$

$$\delta s = \delta \frac{dp}{dy} = \frac{d\delta p}{dy} - \frac{dp}{dy} \cdot \frac{d\delta y}{dy},$$

$$\delta t = \delta \frac{dq}{dy} = \frac{d\delta q}{dy} - \frac{dq}{dy} \cdot \frac{d\delta y}{dy},$$

u. s. w.

In den Gleichungen für δp und δq ist die Sonderung von $\delta x, \delta y$, so weit es thunlich ist, ausgeführt, und die Gleichungen für $\delta r, \delta s, \delta t, \dots$ führen auf $\delta p, \delta q$ zurück. Es lässt sich hiernach übersehen, dass in allen Variationen $\delta p, \delta q, \delta r, \delta s, \dots$ eine Sonderung nach δx und δy ausführbar ist. Die wirkliche Ausführung führt bald zu ziemlich verwickelten Gleichungen, die jedoch auf eine sehr einfache Form zurückkommen, wenn man voraussetzt, δx sei eine von y , und δy sei eine von x unabhängige Grösse, so dass also $\frac{d\delta x}{dy}$ und $\frac{d\delta y}{dx}$ Null werden. Unter dieser Voraussetzung kann man δp und δq auch auf folgende Weise ausdrücken:

$$\delta p = \frac{d(\delta z - p\delta x - q\delta y)}{dx} + \frac{dp}{dx} \delta x + \frac{dp}{dy} \delta y,$$

$$\delta q = \frac{d(\delta z - p\delta x - q\delta y)}{dy} + \frac{dq}{dx} \delta x + \frac{dq}{dy} \delta y.$$

Unter Berücksichtigung dieser Werthe erhält man aus den oben aufgestellten Gleichungen:

$$\delta r = \frac{d^2(\delta z - p\delta x - q\delta y)}{dx^2} + \frac{dr}{dx} \delta x + \frac{dr}{dy} \delta y,$$

$$\delta s = \frac{d^2(\delta z - p\delta x - q\delta y)}{dx dy} + \frac{ds}{dx} \delta x + \frac{ds}{dy} \delta y,$$

$$\delta t = \frac{d^2(\delta z - p\delta x + q\delta y)}{dy^2} + \frac{dt}{dx} \delta x + \frac{dt}{dy} \delta y,$$

...

Führt man diese Werthe in *No. 241* ein, so erhält man unter Berücksichtigung, dass $\delta z = (\delta z - p\delta x - q\delta y) + (p\delta x + q\delta y)$ gesetzt werden kann,

$$\begin{aligned} 242) \quad \delta V = & \left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dV}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{dV}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} + \dots \right) \delta x \\ & + \left(\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{dV}{dp} \cdot \frac{dp}{dy} + \frac{dV}{dq} \cdot \frac{dq}{dy} + \dots \right) \delta y \\ & + \frac{dV}{dz} (\delta z - p\delta x - q\delta y) + \frac{dV}{dp} \cdot \frac{d(\delta z - p\delta x - q\delta y)}{dx} \\ & + \frac{dV}{dq} \cdot \frac{d(\delta z - p\delta x - q\delta y)}{dy} + \frac{dV}{dr} \cdot \frac{d^2(\delta z - p\delta x - q\delta y)}{dx^2} \\ & + \dots \end{aligned}$$

188) Es sind endlich noch die Variationen der Ausdrücke, welche Integralformeln enthalten, zu bestimmen.

Es sei die Variation des Integrals $\int V dx$ zu bestimmen, wo V wie in §. 185 irgend eine Function von $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ bezeichnet. Wäre bekannt, welche eine Function y von x ist, so könnte das Integral bestimmt werden, und die Herstellung der Variation hätte durchaus keine Schwierigkeit. Es wird aber vorausgesetzt, der Zusammenhang zwischen x und y sei unbestimmt gelassen, so dass das Integral gar nicht näher bestimmt werden kann und daher die Variation eines nicht entwickelten Integrales herzustellen ist.

Nach No. 238 ist:

$$\delta \int V dx = \int \delta(V dx) = \int \delta V \cdot dx + \int V \cdot d\delta x.$$

Durch theilweises Integriren erhält man:

$$\int V \cdot d\delta x = V\delta x - \int dV \cdot \delta x,$$

hierdurch wird:

$$\delta \int V dx = V\delta x + \int (\delta V \cdot dx - dV \cdot \delta x).$$

Führt man hierin den Werth von δV , wie derselbe in §. 185 gefunden wurde ein, und berücksichtigt man zugleich dass

$$dV = \left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy} p + \frac{dV}{dp} q + \dots \right) dx$$

ist, so erhält man:

$$\begin{aligned} 243) \quad \delta \int V dx &= V\delta x + \int \frac{dV}{dy} (\delta y - p\delta x) dx \\ &+ \int \frac{dV}{dp} \cdot \frac{d(\delta y - p\delta x)}{dx} dx \\ &+ \int \frac{dV}{dq} \cdot \frac{d^2(\delta y - p\delta x)}{dx^2} dx \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Durch theilweises Integriren findet man:

$$\begin{aligned} \int \frac{dV}{dp} \cdot \frac{d(\delta y - p\delta x)}{dx} dx &= \frac{dV}{dp} \cdot (\delta y - p\delta x) - \int \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dp} \right) dx (\delta y - p\delta x), \\ \int \frac{dV}{dq} \cdot \frac{d^2(\delta y - p\delta x)}{dx^2} dx &= \frac{dV}{dq} \cdot \frac{d(\delta y - p\delta x)}{dx} - \int \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dq} \right) dx \frac{d(\delta y - p\delta x)}{dx}, \\ &= \frac{dV}{dp} \cdot \frac{d(\delta y - p\delta x)}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dq} \right) (\delta y - p\delta x) \\ &+ \int \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dq} \right) dx (\delta y - p\delta x), \end{aligned}$$

auf ähnliche Weise erhält man:

$$\begin{aligned} \int \frac{dV}{dr} \cdot \frac{d^3(\delta y - p\delta x)}{dx^3} dx &= \frac{dV}{dr} \cdot \frac{d^2(\delta y - p\delta x)}{dx^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dr} \right) \frac{d(\delta y - p\delta x)}{dx} \\ &+ \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dr} \right) (\delta y - p\delta x) - \int \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{dV}{dr} \right) dx (\delta y - p\delta x), \end{aligned}$$

u. s. w.

Führt man diese Werthe in (243) ein, so wird

$$\begin{aligned}
244) \quad \delta \int V dx = & V \delta x + (\delta y - p \delta x) \left[\frac{dV}{dp} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dq} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dr} \right) - \dots \right] \\
& + \frac{d(\delta y - p \delta x)}{dx} \left[\frac{dV}{dq} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dr} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{ds} \right) - \dots \right] \\
& + \frac{d^2(\delta y - p \delta x)}{dx^2} \left[\frac{dV}{dr} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{ds} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dt} \right) - \dots \right] \\
& + \dots \\
& + \int \left[\frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dp} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dq} \right) - \dots \right] (\delta y - p \delta x) dx.
\end{aligned}$$

Wenn V wie in §. 186 ausser x und y auch z und die Quotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, ... enthält, so ist für δV der in §. 186 erhaltene Werth zu setzen. Man findet, wenn man hierauf den oben eingeschlagenen Weg verfolgt, einen Ausdruck, der mit dem vorstehenden übereinstimmt, nur sind auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens noch folgende Glieder hinzuzufügen:

$$\begin{aligned}
& (\delta z - p_1 \delta x) \left[\frac{dV}{dp_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dq_1} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dr_1} \right) - \dots \right] \\
& + \frac{d(\delta z - p_1 \delta x)}{dx} \left[\frac{dV}{dq_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dr_1} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{ds_1} \right) - \dots \right] \\
& + \frac{d^2(\delta z - p_1 \delta x)}{dx^2} \left[\frac{dV}{dr_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{ds_1} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dt_1} \right) - \dots \right] \\
& + \dots \\
& + \int \left[\frac{dV}{dz} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dp_1} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dq_1} \right) - \dots \right] (\delta z - p_1 \delta x) dx.
\end{aligned}$$

189) Wenn V wie in §. 187 zwei unabhängig Veränderliche enthält, so sind es die dort vorbereiteten Formeln, die für die Entwicklung der Variation des doppelten Integrales in Anwendung kommen.

Es sei die Variation des Ausdruckes $\int dy \int V dx$, oder, wie gewöhnlich geschrieben wird, des Ausdruckes $\iint V dx dy$ zu bestimmen.

Nach §. 184 ist:

$$\begin{aligned}
\delta \iint V dx dy &= \iint \delta(V dx dy) \\
&= \iint (\delta V dx dy + V dy d\delta x + V dx d\delta y).
\end{aligned}$$

Diese Gleichung geht durch theilweises Integriren der beiden letzten Theile des doppelten Integrales in folgende über:

$$\delta \iint V dx dy = \iint \delta V \cdot dx dy + \int V dy \delta x + \int V dx \delta y \\ - \iint \left[\left(\frac{dV}{dx} \right) \delta x + \left(\frac{dV}{dy} \right) \delta y \right] dx dy.$$

Hierin ist der in §. 187 für δV erhaltene Werth einzuführen. Beachtet man nun, dass die erste Linie der Gleichung (242), welche den Werth von δV ausdrückt, gleich ist $\left(\frac{dV}{dx} \right) \delta x$, und die zweite gleich ist $\left(\frac{dV}{dy} \right) \delta y$, und setzt man zur Abkürzung $\delta z = p\delta x - q\delta y = \delta\omega$, so erhält man:

$$\begin{aligned} 245) \quad \delta \iint V dx dy = & \int V dy \delta x + \int V dx \delta y + \iint \frac{dV}{dz} dx dy \delta\omega \\ & + \iint \frac{dV}{dp} dx dy \frac{d\delta\omega}{dx} \\ & + \iint \frac{dV}{dq} dx dy \frac{d\delta\omega}{dy} + \iint \frac{dV}{dr} dx dy \frac{d^2\delta\omega}{dx^2} \\ & + \iint \frac{dV}{ds} dx dy \frac{d^2\delta\omega}{dx dy} \\ & + \dots \end{aligned}$$

Durch theilweises Integriren erhält man aber:

$$\begin{aligned} \iint \frac{dV}{dp} dx dy \frac{d\delta\omega}{dx} &= \int \left[\frac{dV}{dp} \delta\omega - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dp} \right) dx \delta\omega \right] dy, \\ \iint \frac{dV}{dq} dx dy \frac{d\delta\omega}{dy} &= \int \left[\frac{dV}{dq} \delta\omega - \frac{d}{dy} \left(\frac{dV}{dq} \right) dy \delta\omega \right] dx, \\ \iint \frac{dV}{dr} dx dy \frac{d^2\delta\omega}{dx^2} &= \int \left[\frac{dV}{dr} \cdot \frac{d\delta\omega}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dr} \right) \delta\omega + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dr} \right) dx \delta\omega \right] dy, \\ \iint \frac{dV}{ds} dx dy \frac{d^2\delta\omega}{dx dy} &= \int \left[\frac{dV}{ds} \cdot \frac{d\delta\omega}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{ds} \right) dx \frac{d\delta\omega}{dy} \right] dy \\ &= \frac{dV}{ds} \delta\omega - \int \frac{d}{dy} \left(\frac{dV}{ds} \right) dy \delta\omega - \int \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{ds} \right) \delta\omega \right. \\ &\quad \left. - \frac{d^2}{dx dy} \left(\frac{dV}{ds} \right) dy \delta\omega \right] dx \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Führt man diese Werthe in der Gleichung No. 245 ein, so erhält man für die gesuchte Variation einen Ausdruck, der aus drei Theilen besteht, einem Theile ohne Integralzeichen, einem zweiten mit einem Integralzeichen und einem dritten mit zwei Integralzeichen. In dieser Allgemeinheit wird die auf dem

bezeichneten Weg zu erhaltende Formel kaum angewendet. Der specielle Fall hingegen, in welchem $\delta x = 0$ und $\delta y = 0$ sind, in welchem also nur z als der Variation unterworfen gedacht wird, hat mehrere wichtige Anwendungen in den Problemen über Maxima und Minima. In diesem speciellen Falle erhält man für die gesuchte Variation folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 246) \quad \delta \iint V dx dy &= \frac{dV}{ds} \delta z + \int \left[\frac{dV}{dp} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{ds} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{dV}{ds} \right) + \dots \right] \delta z dy \\
 &\quad + \int \left[\frac{dV}{dr} - \dots \right] \frac{d\delta z}{dx} dy. \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + \int \left[\frac{dV}{dq} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{ds} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{dV}{dt} \right) + \dots \right] \delta z dx \\
 &\quad + \int \left[\frac{dV}{dt} - \dots \right] \frac{d\delta z}{dy} dx \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + \iint \left[\frac{dV}{dz} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dp} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{dV}{dq} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dr} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{d^2}{dx dy} \left(\frac{dV}{ds} \right) + \dots \right] \delta z dx dy.
 \end{aligned}$$

190) Der einfachste unter den in den letzten § betrachteten Fällen ist der des §. 188. Der Ideengang, der dort der leitende war, war es auch in den zusammengesetzteren Fällen. Man hat Euler die Entwicklung des einfachsten Falles zu verdanken.

Es setzen alle diese Entwicklungen voraus, dass der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck die Form $V dx$ besitze. Lagrange hat von der noch allgemeineren Form $\int U$ die Variation bestimmt, wo U eine beliebige Function von $x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \dots$ bezeichnet. Die Formel, die man erhält, ist für die Anwendungen nicht so bequem, wie die Eulersche Formel, es lassen sich aber Fälle denken, in welchen der zu variirende Integralausdruck sich gar nicht auf die von Euler betrachtete Form zurückführen lässt. Es soll desshalb auch noch die Lagrange'sche Formel gegeben werden.

Gesetzt man erhalte durch gewöhnliche Differentiation

$$\begin{aligned}
 dU &= M dx + N d^2x + P d^3x + \dots \\
 &\quad + m dy + n d^2y + p d^3y + \dots
 \end{aligned}$$

Nach §. 182 ist daher:

$$\delta U = M\delta x + N\delta dx + P\delta d^2x + \dots \\ + m\delta y + n\delta dy + p\delta d^2y + \dots,$$

folglich:

$$\delta \int U = \int M\delta x + \int N\delta dx + \int P\delta d^2x + \dots \\ + \int m\delta y + \int n\delta dy + \int p\delta d^2y + \dots$$

Unter Berücksichtigung der Formel No. 236 erhält man durch theilweises Integriren:

$$\begin{aligned} \int N\delta dx &= \int Nd\delta x = N\delta x - \int dN \cdot \delta x, \\ \int P\delta d^2x &= \int Pd\delta dx = P\delta dx - \int dP \cdot d\delta x \\ &= P\delta dx - dP\delta x + \int d^2P\delta x, \\ \int Q\delta d^3x &= Qd^2\delta x - dQd\delta x + d^2Q\delta x - d^3Q\delta x, \\ &\dots \\ \int n\delta dy &= n\delta y - \int dx\delta y, \\ \int n\delta d^2y &= p\delta dy - dp\delta y + \int d^2p\delta y, \\ \int q\delta d^3y &= qd^2\delta y - dqd\delta y + d^2q\delta y - \int d^3q\delta y, \\ &\dots \end{aligned}$$

Hierdurch erhält man:

$$\begin{aligned} 247) \quad \delta \int U &= (N - dP + d^2Q - d^3R + \dots)\delta x \\ &+ (P - dQ + d^2R - \dots)d\delta x \\ &+ (Q - dR + d^2S - \dots)d^2\delta x \\ &+ \dots \\ &+ (n - dp + d^2q - d^3r + \dots)\delta y \\ &+ (p - dq + d^2r - \dots)d\delta y \\ &+ (q - dr + d^2s - \dots)d^2\delta y \\ &+ \dots \\ &+ \int (M - dN + d^2P - d^3Q + \dots)\delta x \\ &+ \int (m - dn + d^2p - d^3q + \dots)\delta y. \end{aligned}$$

191) Die wichtigste Anwendung der Variationsrechnung ist die zur Lösung der Probleme über Maxima und Minima in dem in §. 180 und 181 angeführten Sinne. Es kömmt, wie schon dort gezeigt wurde, darauf an eine solche Relation der Veränderlichen aufzufinden, welche der Gleichung

$$\delta \int_a^\beta V dx = 0$$

Genüge leistet. Zwei Fälle sind hier zu unterscheiden, es sind entweder die Grenzen α , β des Integrals constant, und also nicht einer Variation unterworfen, oder sie sind variabel.

Es wird der einfachere Fall zuerst betrachtet, und der noch grösseren Einfachheit halber überdiess angenommen, es enthalte V nur x , y und die Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... die Aufgabe, um deren Lösung es sich handelt, lässt sich hiernach in folgender Art bezeichnen: es wird eine solche Function $y = f(x)$ gesucht, durch welche $\delta \int_{\alpha}^{\beta} V dx = 0$ wird, oder, da $y = f(x)$ eine ebene Curve ausdrückt, so lässt sich die Aufgabe auch so aussprechen: es wird jene Curve gesucht, durch welche das bestimmte Integral $\int_{\alpha}^{\beta} V dx$ ein Maximum oder Minimum wird.

In §. 188 ist die Variation des unbestimmten Integrals $\int V dx$ entwickelt, die Variation des bestimmten Integrales ergibt sich hieraus, wenn man $x = \beta$ und $x = \alpha$ setzt und den zweiten Werth von dem ersten abzählt. Man findet hierdurch

$$\delta \int_{\alpha}^{\beta} V dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dp} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dq} \right) - \dots \right] (\delta y - p \delta x) dx,$$

denn der erste Theil der Gleichung No. 244, der kein Integralzeichen besitzt, verschwindet sowohl für $x = \beta$, wie für $x = \alpha$, indem die Grenzen α , β nicht veränderlich, nicht variabel sind, wodurch also δx , δy für $x = \beta$, und $x = \alpha$ Null werden. Da die Bedingung, unter welcher das bestimmte Integral $\int_{\alpha}^{\beta} V dx$ ein Maximum oder Minimum werden kann, darin besteht, dass die Variation desselben Null werde, so kommt es darauf an, eine solche Function von x für y herzustellen, durch welche

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dp} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dq} \right) - \dots \right] (\delta y - p \delta x) dx = 0$$

wird, durch welche also auch

$$\left[\frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dp} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dq} \right) - \dots \right] (\delta y - p \delta x) = 0$$

wird. Wegen der Unbestimmtheit der Variationen δy , δx geschieht dieser Gleichung nur Genüge, wenn

$$248) \frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dp} \right) = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dq} \right) - \dots = 0$$

wird. Diese Gleichung ist eine Differentialgleichung, das Integral derselben giebt jene Relation zwischen x und y an, durch welche das bestimmte Integral $\int_a^\beta V dx$ ein Maximum oder Minimum werden kann.

Es lässt sich beweisen, dass $V dx$ immer ein exactes Differential ist, wenn der Gleichung No. 248 Genüge geschieht. Euler hat diesen Satz aufgestellt, und denselben, gestützt auf Betrachtungen der Variationsrechnung, begründet (Novi Commentarii Acad. Petropolitanae. Tom. XVI.). Lagrange hat einen von der Variationsrechnung unabhängigen Beweis desselben Satzes gegeben (Leçons sur le Calcul des Fonctions-Leçon 21), endlich findet sich in Moigno's Vorlesungen über Integralrechnung ein von J. Binet gegebener Beweis, der nicht wie der Lagrange'sche auf unendliche, nicht näher auf ihre Convergenz geprüfte Reihen, sich stützt, und hierin einen Vorzug hat.

Aufgabe.

Man soll die Gleichung der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten, deren Ordinaten a , b , und a_1 , b_1 sind, bestimmen.

Die Länge s einer Curve zwischen den Abscissen $x=a$ und $x=a_1$ ist

$$s = \int_a^{a_1} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^{a_1} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx = \int_a^{a_1} \sqrt{1 + p^2} \cdot dx,$$

es ist daher $V = \sqrt{1 + p^2}$, folglich:

$$\frac{dV}{dy} = 0, \quad \frac{dV}{dp} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad \frac{dV}{dq} = 0, \quad \frac{dV}{dr} = 0, \dots$$

Die Bedingung, unter welcher s ein Maximum oder Minimum werden kann, ist daher nach der Gleichung No. 248

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right) = 0,$$

es folgt hieraus:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \frac{dp}{dx} - \frac{p^2}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dp}{dx} = 0,$$

daher:

$$\frac{1}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dp}{dx} = 0.$$

Dieser Gleichung geschieht Genüge durch

$$\frac{dp}{dx} = 0,$$

es ist daher:

$$p = C.$$

Da aber $p = \frac{dy}{dx}$, so erhält man $dy = Cdx$, folglich

$$y = Cx + C_1.$$

Diese Gleichung ist die einer geraden Linie, sie ist es durch welche s ein Minimum wird, denn ein Maximum kann sie nicht bezeichnen, da es offenbar unzählig viele andere Linien zwischen zwei festen Punkten giebt, die grösser als die gerade Verbindungslinie sind. Zur Bestimmung der Constanten C , C_1 hat man sich nur zu erinnern, dass nach der Aufgabe $y = \beta$ wird, wenn $x = a$, und das $y = b_1$ wird, wenn $x = a_1$. Man erhält hierdurch folgende zwei Gleichungen:

$$b = Ca + C_1,$$

$$b_1 = Ca_1 + C_1,$$

aus welchen C und C_1 sich bestimmen lassen.

192) Wenn V ausser der abhängig Veränderlichen y , noch eine zweite abhängig Veränderliche z enthält, wie dies etwa bei Fragen über Linien doppelter Krümmung vorkommt, so führt noch immer das im vorhergehenden § befolgte Verfahren zur Aufstellung jener Differentialgleichungen, durch deren Integration die dem Maximum oder Minimum entsprechende Relationen zwischen x und y , und x und z erhalten werden. Man findet nämlich unter zu Grundlegung der in §. 188 gegebenen Entwicklung für $\delta \int V dx$ folgende Gleichungen:

$$\frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dp} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dq} \right) - \dots = 0,$$

$$\frac{dV}{dz} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dp_1} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dq_1} \right) - \dots = 0,$$

deren Integrale die verlangten Relationen zwischen x , y , z ausdrücken.

193) Endlich ist auch der Fall, in welchem V zwei unabhängig Veränderliche und eine abhängig Veränderliche enthält, auf ähnliche Weise zu beurtheilen, nur ist begreiflich die in §. 189 gegebene Entwicklung von $\delta \iint V dx dy$ zu Rath zu ziehen. Wenn auch hier die Grenzen der Integrale constant sind, und es sich also darum handelt eine Function dreier Veränderlicher herzustellen, durch welche das bestimmte Doppelintegral $\iint V dx dy$ zu einem Maximum oder Minimum wird, so findet man, geleitet durch Betrachtungen, die den in §. 191 gegebenen ähnlich sind, dass die Bedingung eines Maximums oder Minimums durch die Gleichung

$$\iint \left[\frac{dV}{dz} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dp} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{dV}{dq} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dr} \right) \frac{d^2}{dx dy} \left(\frac{dV}{ds} \right) + \dots \right] \delta z dx dy = 0$$
 ausgedrückt wird. Hieraus folgt bei der Unbestimmtheit von δz weiter

$$249) \frac{dV}{dz} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dp} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{dV}{dq} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dr} \right) + \frac{d^2}{dx dy} \left(\frac{dV}{ds} \right) + \dots = 0.$$

Diese Gleichung ist eine Differentialgleichung mit partiellen Differentialien, deren Integral den vorgelegten Ausdruck zu einem Maximum oder Minimum machen kann. Die willkürlichen Functionen, die in solchen Integralen vorkommen, sind natürlich den Grenzen gemäss zu bestimmen, welche in dem vorgelegten Ausdruck angegeben sind.

194) Es ist nun zweitens der Fall, in welchem die Grenzen der Integrale selbst variabel sind, zu untersuchen. Es soll der grösseren Deutlichkeit halber das einzuhaltende Verfahren für einen einfacheren Fall entwickelt werden.

Gesetzt es sei jene Relation zwischen x und y zu bestimmen, durch welche der Ausdruck $\int_{x_0}^{x_1} V dx$, in welchem x_0, x_1 selbst variabel sind, ein Maximum oder Minimum werde. Bezeichnet man zur Abkürzung den Theil der Formel No. 244, der kein Integralzeichen besitzt durch X , bezeichnet man ferner durch X_0, X_1 die Werthe von X , die man erhält, wenn x in x_0 und x_1 übergeht, so hat man als Bedingung eines Maximums oder Minimums folgende Gleichung:

$$250) \quad X_1 - X_0 + \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dp} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dq} \right) - \dots \right] (\delta y - p \delta x) dx = 0.$$

Nimmt man an x_0, x_1 seien schon so bestimmt, dass der vorstehenden Gleichung Genüge geschieht, seien also unveränderlich, so hat man wie früher

$$251) \quad \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dp} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dq} \right) - \dots \right] (\delta y - p \delta x) dx = 0,$$

daher:

$$\frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dp} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dq} \right) - \dots = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung drückt jene Relation zwischen x und y aus, durch welche der vorgelegte Ausdruck ein Maximum oder Minimum werden kann.

Aus den Gleichungen *No. 250* und *251* folgt $X_1 - X_0 = 0$, und hieraus erhält man $X_1 = 0, X_0 = 0$, weil x_0 und x_1 von einander unabhängig sind. Durch diese letzten Gleichungen sammt den Folgerungen, zu denen sie hinführen, wird über die Beschaffenheit der für x, y erhaltenen Relation für die speciellen Fälle x_0, x_1 näher verfügt.

Aufgabe.

Man soll die Gleichung zwischen x und y bestimmen, durch welche

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx$$

ein Minimum wird.

Hier ist, wie in §. 191 $V = \sqrt{1 + p^2}$,

daher:

$$\frac{dV}{dy} = 0, \quad \frac{dV}{dp} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad \frac{dV}{dq} = 0, \quad \frac{dV}{dr} = 0, \dots$$

es ist daher auch wie dort $y = Cx + C_1$, die Relation zwischen x und y , die den vorgelegten Ausdruck zu einem Minimum macht.

Zum Unterschiede gegen die frühere Aufgabe sind aber die Grenzen x_0, x_1 variabel. Dies führt, wie erwähnt, zu den Gleichungen $X_0 = 0, X_1 = 0$. Die Werthe von X_0, X_1 ergeben sich aus der Gleichung *No. 244*, wenn man in derselben in den nicht mit einem Integralzeichen versehenen Theile x_0 und x_1 für x

setzt, und zugleich die Werthe von V , $\frac{dV}{dp}$, $\frac{dV}{dq}$, ..., wie sie oben angegeben wurden, einführt. Man erhält hierdurch.

$$\left(\sqrt{1+p^2} - \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} \right) \delta x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \delta y = 0,$$

folglich:

$$\delta x + p \delta y = 0,$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta y}{\delta x} + 1 = 0,$$

wo aber x_0, y_0 für x, y , und für die andere Grenze x_1, y_1 für x, y zu setzen sind, und also zwei Gleichungen für die Grenzen der Linie des Minimums erhalten werden, wodurch die beiden Constanten sich näher bestimmen lassen. In der analytischen Geometrie ist die Bedeutung jener Gleichungen näher zu entwickeln.

195) In den bisher erörterten Problemen über Maxima und Minima Werthe bestimmter Integralfunctionen, war ohne alle Beschränkung nur nach jener Relation der Veränderlichen gefragt, durch welche ein bestimmtes Integral zu einem Maximum oder Minimum werde. Es kann aber in andern Problemen unter einer gewissen Beschränkung nach einem Maximum oder Minimum gefragt werden, wie dies der Fall ist, wenn jene Relation der Veränderlichen verlangt wird, durch welche das Integral $\int V dx$, unter der Beschränkung dass $\int V_1 dx$ eine constante Grösse ist, ein Maximum oder Minimum werde. V und V_1 bezeichnen hier Functionen von $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ Maxima und Minima dieser Art werden relative Maxima und Minima genannt. Beispiele hierzu sind alle isoperimetrischen Probleme.

Die zu lösende Aufgabe lässt sich in folgender Weise bezeichnen: es soll

$$\int V dx$$

zu einem Maximum oder Minimum werden, während zugleich

$$\int V_1 dx = C$$

Statt findet.

Dies wird durch jene Relation zwischen x und y erreicht, welche zugleich den beiden Gleichungen

$$\delta \int V dx = 0 \text{ und } \delta \int V_1 dx = 0$$

genügt. Multiplicirt man die zweite dieser Gleichungen mit einer willkürlichen Constanten A , und addirt man hierauf beide Gleichungen, so können beide Gleichungen durch die einzige

$$252) \delta \left(\int V dx + A \int V_1 dx \right) = 0$$

ersetzt werden, welche nun die beschränkende Bedingung in sich einschliesst.

Wird für diese letzte Gleichung, gerade so wie in den Fragen über absolute Maxima und Minima, jene Relation zwischen x und y bestimmt, welche ihr Genüge leistet, so wird durch eben diese Relation $\int V dx$ auch in dem speciellen Falle, in welchem $\int V_1 dx$ constant ist, ein Maximum oder Minimum werden. Es lassen sich daher die Probleme über relative Maxima und Minima auf die Fragen über absolute Maxima und Minima zurückführen.

Aufgabe.

Es soll von allen ebenen Curven jene bestimmt werden, deren Flächeninhalt bei gleichem Umfange ein Maximum oder Minimum ist.

Der Flächeninhalt einer ebenen Curve für die Grenzen $x=\alpha$ und $x=\beta$ ist:

$$\int_{\alpha}^{\beta} y dx,$$

und die Länge der Curve für die gleichen Grenzen ist:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx.$$

Die Bedingungsgleichung eines Maximum's oder Minimum's ist:

$$\delta \left(\int_{\alpha}^{\beta} y dx + A \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx \right) = 0,$$

oder:

$$\delta \int_{\alpha}^{\beta} \left(y + A \sqrt{1 + p^2} \right) dx = 0.$$

Setzt man $y + A \sqrt{1 + p^2} = V$, so hat man nach §. 191 als Bedingung eines Maximum's oder Minimum's folgende Gleichung:

$$m) \frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dp} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dV}{dq} \right) - \dots = 0.$$

Es ist aber:

$$\frac{dV}{dy} = 1, \quad \frac{dV}{dp} = \frac{Ap}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \frac{dV}{dq} = 0, \quad \frac{dV}{dr} = 0, \dots$$

hierdurch geht die Gleichung (m) in folgende über:

$$1 - \frac{d}{dx} \left(\frac{Ap}{\sqrt{1+p^2}} \right) = 0.$$

Führt man die angezeigte Differentiation aus, so findet man:

$$1 - A \frac{dp}{dx} \cdot \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

und hieraus erhält man, wenn man berücksichtigt dass $dx = \frac{dy}{p}$ ist,

$$dy - \frac{Ap \, dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Es ist daher:

$$y + \frac{A}{\sqrt{1+p^2}} = C,$$

folglich:

$$p = \frac{\sqrt{A^2 - (C-y)^2}}{C-y},$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{A^2 - (C-y)^2}}{C-y}.$$

Das Integral dieser Gleichung, nämlich:

$$(x-C_1)^2 + (y-C)^2 = A^2,$$

drückt jene Relation zwischen x und y , d. h. jene Curve aus, für welche bei gleichem Umfange mit anderen Curven der Inhalt ein Maximum wird. Die erhaltene Gleichung ist die eines Kreises, der also hiernach jene Curve ist, welcher die Eigenschaft eines Maximum's in dem genannten Sinne zukömmt.

Es lassen sich ähnliche Aufgaben in Bezug auf Flächen und den von ihnen begrenzten Raum vorlegen, doch finden diese zweckmässiger in einer analytischen Geometrie ihre Erläuterung.

Jolly, Philipp <<von>>,

Anleitung zur Differential- und Integralrechnung

Heidelberg 1846

Math.p. 242 m

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082103-0